RELATIVIDAD Y ELECTROMAGNETISMO.

Autor: DIEGO SÁEZ SCHWEDT.
Fecha: 2019…2026.

DISCLAIMER:
Este documento corresponde a una versión preliminar de trabajo académico.
No se sometió a ningún proceso de revisión por pares ("peer review") ni a proceso editorial formal.
Puede contener errores, omisiones, secciones incompletas y desarrollos provisionales.
Se publica como archivo de preservación intelectual y registro de trabajo, no como versión final certificada.
Es la tercera parte de una serie de 3 archivos (Relativ1, Relativ2 y Relativ3).

Primera Parte (previa)

1. **SISTEMAS DE REFERENCIA**
2. **LEYES FÍSICAS**
3. **RELATIVIDAD ESPECIAL, INTRODUCCIÓN**
4. **TRANSFORMACIÓN DE LORENTZ**
5. **MECÁNICA RELATIVISTA Y ELECTROMAGNETISMO**

Segunda Parte (previa)

6. **RELATIVIDAD GENERAL, INTRODUCCIÓN**
7. **CURVATURA DEL ESPACIO-TIEMPO**
8. **HERRAMIENTAS MATEMÁTICAS**
9. **FÍSICA EN ESPACIOS CURVOS**

TERCERA PARTE.

10. TENSOR DE ENERGÍA-IMPULSO
- 10.1 Propiedades básicas
  - 10.1.1 Definición de componentes
  - 10.1.2 Simetría
  - 10.1.3 Leyes de conservación
  - 10.1.4 Coordenadas curvilíneas
- 10.2 Fuentes de energía
  - 10.2.1 Polvo cósmico
  - 10.2.2 Fluido perfecto
  - 10.2.3 Materia compacta
  - 10.2.4 Derivada covariante
- 10.3 Campo electromagnético
  - 10.3.1 Tensor de tensiones de Maxwell
  - 10.3.2 Energía y momento del campo electromagnético
  - 10.3.3 Expresión tensorial del $T^{\alpha\beta}$ electromagnético
  - 10.3.4 Gas de fotones
  - 10.3.5 Traza del tensor energía-impulso
- 10.4 Perturbaciones métricas
  - 10.4.1 Presiones
  - 10.4.2 Análisis de fuerzas
  - 10.4.3 Fuerza relativista
  - 10.4.4 Análisis semiclásico
  - 10.4.5 Flujos másicos
- 10.5 Masa gravitatoria activa y pasiva

10.5.1 Esfera en rotación
10.5.2 Gravitomagnetismo 2.0
10.6 Ecuación de campo débil
10.6.1 Traza del tensor de energía-impulso
10.6.2 Calibres gravitatorios “gauge”
10.6.3 Rindler cuadrático y lineal
10.6.4 Calibre inercial y calibre isócrono
10.6.5 Gullstrand-Painlevé y Schwarzschild
10.6.6 Calibre Coulomb y calibre isotrópico
10.6.7 Mezcla de efectos
10.7 Métrica con traza reversada
10.7.1 Masas móviles
10.7.2 Masas en reposo
10.7.3 Efectos gravitomagnéticos
10.7.4 Efectos de la presión
10.7.5 Ecuación de campo tensorial
11. ECUACIONES DE CAMPO DE EINSTEIN
11.1 Tensores de Riemann y Ricci
11.1.1 Rotación espacial
11.1.2 Coordenadas de Rindler
11.1.3 Rotación a velocidad angular uniforme w_o
11.1.4 Coordenadas de Gullstrand-Painlevé
11.1.5 Coordenadas de Schwarzschild
11.2 Ecuaciones de Einstein
11.2.1 Unión entre el vacío y la materia
11.2.2 Divergencia del tensor de Ricci
11.2.3 Ecuación de traza reversada
11.2.4 Conservación de la energía
11.2.5 Transformación de calibre “gauge”
11.2.6 Divergencia covariante del tensor de Ricci
11.3 Formulación lagrangeana
11.3.1 Lagrangeano electromagnético clásico
11.3.2 Lagrangeano electromagnético, Relatividad Especial
11.3.3 Lagrangeano electromagnético, Relatividad General
11.3.4 Lagrangeano gravitatorio, introducción clásica
11.3.5 Lagrangeano gravitatorio, acción de Hilbert.
11.4 Ecuaciones variacionales
11.4.1 Variación del determinante ‘g’
11.4.2 Variación del escalar de Ricci
11.4.3 Variación del tensor de Riemann
11.4.4 Variación del tensor de Ricci
11.4.5 Variación de la acción
11.4.6 Acción de la materia, ejemplos
11.4.7 Variación de los Christoffel
11.5 Primeras soluciones exactas
11.5.1 Solución de vacío
11.5.2 Astro en formación
11.5.3 Polvo en expansión
11.5.4 Introducción a la Cosmología
12. SOLUCIONES EXACTAS
12.1 Solución de vacío de Schwarzschild

12.1.1 Símbolos de Christoffel
12.1.2 Tensor de Riemann
12.1.3 Tensor de Ricci
12.1.4 Coordenadas isotrópicas
12.1.5 Otras coordenadas
12.2 Solución de Reissner-Nordström
12.2.1 Tensor de traza nula
12.2.2 Ecuación de Einstein alternativa
12.2.3 Ecuaciones de Maxwell-Einstein
12.2.4 Ecuaciones de campo
12.2.5 Métrica completa
12.3 Solución interna de Schwarzschild
12.3.1 Símbolos de Christoffel
12.3.2 Tensor de Riemann
12.3.3 Tensor de Ricci
12.3.4 Tensor energía-impulso con presiones
12.3.5 Ecuaciones de campo
12.3.6 Solución métrica radial
12.3.7 Solución métrica temporal
12.4 Solución de Kerr
12.4.1 Perturbación radial
12.4.2 Aditividad y linealidad
12.4.3 Coordenadas esferoidales
12.4.4 Desarrollo multipolar
12.4.5 Cambio de variable ortogonal t, φ
12.4.6 Ansatz
12.4.7 Riemann, Ricci, solución final
12.5 Túnel de espacio-tiempo
12.6 Otras soluciones
13. TEMAS ADICIONALES
13.1 Paradojas de la Relatividad Especial
13.1.1 Paradoja de los gemelos
13.1.2 Paradoja de la jabalina y el granero
13.1.3 Paradoja de la nave de Bell
13.1.4 Rigidez de Born
13.1.5 Paradoja de Ehrenfest
13.2 Cosmología
13.2.1 Estabilidad de la gravitación
13.2.2 Constante cosmológica de Einstein Λ
13.2.3 Principio de Mach
13.2.4 Big Bang, Universo en expansión
13.2.5 Ondas gravitatorias
13.3 Fronteras del mundo
13.3.1 Universos adentro de un punto
13.3.2 Efectos cuánticos
13.3.3 Conquista del espacio
13.3.4 Viajes en el tiempo
13.3.5 Teletransporte
13.3.6 Antigravedad, masa negativa
13.4 Lecturas adicionales
14. ÍNDICE DE AUTORES Y DICCIONARIO.

15. EJERCICIOS RESUELTOS.

16. ANEXOS

    Cálculo numérico, códigos fuente.

    Lecturas de interés.

BIBLIOGRAFÍA.

10. TENSOR DE ENERGÍA-IMPULSO.

En nuestro estudio actual de la Relatividad tenemos iniciadas 4 líneas de estudio:

- Modelo de métrica $(dS)^2 = g_{ii}.(dEP)^2 - (c.dt)^2.(1 + 2.\Phi_g/c^2)$,
  siendo $(dEP)^2$ la parte espacial que sigue aproximadamente las fórmulas de Euclides-Pitágoras,
  aunque con varios indicios que apuntan a la necesidad de contemplar una perturbación $g_{ii}\neq 1$.
- Ecuaciones de Euler-Lagrange, derivadas directamente de la métrica, para cuantificar los efectos de la métrica sobre la materia.
- $\nabla^2\Phi_g = 4.\pi.G.\rho_m$ como punto de partida para modelar la forma en que las concentraciones de materia perturban la métrica →identificamos la necesidad de utilizar una derivada covariante.
- Herramientas de Geometría Diferencial para descripción matemática de la curvatura.

Sabemos que la formulación es todavía incompleta porque la densidad de masa ρ_m y el potencial gravitatorio Φ_g no son *bien variantes* frente a un cambio de coordenadas. Inspirados en la similitud con el escenario electromagnético buscamos cuadrivectores (o tensores) en donde ρ_m aparezca acompañado de $j_m^{\rightarrow}$ y Φ_g aparezca acompañado de $A_g^{\rightarrow}$.

En la sección 7.1.3 Gravito-Electromagnetismo partíamos de masas en reposo y realizábamos una transformación de Lorentz para ver a dichas masas en movimiento.
El resultado era una propuesta de métrica levemente perturbada $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$, con $|h_{\alpha\beta}|\ll 1$
con $h_{\alpha\beta} = 2/c^2$ *

$[-\Phi_g$	$c.A_{gx}$	$c.A_{gy}$	$c.A_{gz}$	$]$
$[c.A_{gx}$	o2	o2	o2	$]$
$[c.A_{gy}$	o2	o2	o2	$]$
$[c.A_{gz}$	o2	o2	o2	$]$

La matriz de perturbaciones contiene símbolos o2 en su región espacial 3x3, con lo que queremos indicar que los consideramos infinitésimos de segundo orden ($v_o^2/c^2.\Phi_g$ en los ejemplos 7.1). Mantenemos consistencia con los desarrollos que habíamos hecho hasta el inicio del capítulo 7, cuando solo conocíamos métricas con perturbación temporal, y los primeros agregados fueron los que tenían un paralelismo o analogía inmediata con elementos del Electromagnetismo.
Advertimos que esto es un error, pero podríamos llamarlo "*error útil*" porque nos va a permitir seguir avanzando. Y los propios avances nos darán pistas sobre la forma de corregir el error.

Hecha la advertencia, continuamos observando que la formulación tensorial 5.6.3 de las ecuaciones del Electromagnetismo $[]^2A^\alpha = -\mu_o.J^\alpha$ nos motiva a buscar algo similar para la Gravitación. El laplaciano ∇^2 (o más genéricamente el d'Alembertiano $\partial_\lambda\partial^\lambda = []^2 = \nabla^2 - \partial_{ct}^2$) es el operador candidato a utilizar porque sigue la línea exitosa del Electromagnetismo. También porque aproxima bien al tensor de Ricci, como vimos recientemente en el capítulo 9.6, y eso provee una buena perspectiva de que los resultados para gravedades débiles puedan extenderse a los escenarios con gravedades arbitrarias. Tomamos entonces las derivadas segundas de este tensor $h_{\alpha\beta}$ y obtenemos, luego de ajustar los factores de escala: $[]^2\, h_{\alpha\beta} = -8.\pi.G/c^4.\ T_{\alpha\beta}$.
Siendo $T_{\alpha\beta}$=

$[c^2.\rho_m$	$-c.j_{mx}$	$-c.j_{my}$	$-c.j_{mz}$	$]$
$[-c.j_{mx}$	o2	o2	o2	$]$
$[-c.j_{my}$	o2	o2	o2	$]$
$[-c.j_{mz}$	o2	o2	o2	$]$

Esta ecuación tensorial resume las del "Gravito-Electromagnetismo" de la sección 7.1:
Parte temporal 00: $[]^2\Phi_g = 4.\pi.G.\rho_m$
Parte temporal-espacial 0i: $[]^2(c.A_g^{\rightarrow}) = 4.\pi.G.(j_m^{\rightarrow}/c)$, para i=1,2,3.
Las corrientes másicas $j_m^{\rightarrow} = \rho_m.v^{\rightarrow}$ son causantes de potencial vectorial $A_g^{\rightarrow}$, es la analogía ya observada en el capítulo 7.1 entre la Gravitación de Newton y el Electromagnetismo.
El equivalente gravitatorio del ϵ_0 es $\epsilon_G = -1/(4\pi G)$, y el equivalente gravitatorio del μ_0 es $\mu_G = -4\pi G/c^2$.
Igual que en el Electromagnetismo se cumple $\mu_G.\epsilon_G = 1/c^2$, lo que se interpreta como que las perturbaciones métricas se propagan a la velocidad de la luz.

Los componentes de la submatriz espacial 3x3 del tensor $T_{\alpha\beta}$ los consideramos "*casi nulos*" y los marcamos como 'o2', porque surgen de aplicar el operador d'Alembertiano sobre coeficientes métricos de orden 'o2'. En particular, cuando las masas solo se mueven según la dirección-x con velocidad v_o, $T_{xx}=\rho_m.v_o^2$.

En la sección 7.1 partíamos de un referencial Σ' solidario a la masa 'M', con Lagrangeano:

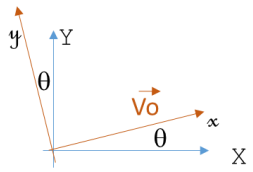
$$\mathcal{L}(X'^h,\dot{X}'^h,\tau) = -m_o.c^2.\sqrt{\dot{t}'^2.(1+2\Phi'_g/c^2) -(\dot{x}'^2+\dot{y}'^2+\dot{z}'^2)/c^2}$$

Un cambio de variables nos conducía a un Lagrangeano con la siguiente estructura:

$$\mathcal{L}(X^h,\dot{X}^h,\tau) = -m_o.c^2.\sqrt{\dot{t}^2.(1+2\Phi_g/c^2) -\dot{x}^2/c^2(1-2.\Psi_g/c^2)-\dot{y}^2/c^2-\dot{z}^2/c^2 - 4A_{gx}/c^2.\dot{t}\,\dot{x}}$$

Las leyes de la Física deben tener el mismo enunciado en cualquier sistema de referencia, esa es la esencia de la Relatividad. Como consecuencia del cambio de coordenadas aparecen términos métricos de "arrastre" $\dot{t}.\dot{x}$, que en el nuevo referencial los interpretamos como perturbaciones causadas por masas que se mueven en la dirección de la coordenada-x.

Mediante un giro de ángulo θ y un cambio a otras coordenadas (X,Y) podemos ver a las masas moviéndose con velocidad en 2 ejes coordenados: $v_X=v_o.\cos\theta$ y $v_Y=v_o.\sen\theta$.



Aplicamos a la métrica el cambio de variables $x=X.\cos\theta + Y.\sen\theta$, $y= -X.\sen\theta + Y.\cos\theta$
El término $A_{gx}.\dot{x}\dot{t}$ se desdobla en $A_{gx}.\dot{t}.(\dot{X}.\cos\theta+\dot{Y}.\sen\theta)= A_{gx}.\cos\theta.\dot{X}.\dot{t} + A_{gx}.\sen\theta.\dot{Y}.\dot{t}$.
La regla general que viene perfilándose es que los términos de "arrastre" espacio-tiempo son consistentes con las direcciones en las que se están moviendo las masas causantes de la gravedad.

Los términos espacio-espacio $\dot{x}^2$ y $\dot{y}^2$ también se expanden.

Ejercicio: Comprobar que aparecen nuevas perturbaciones métricas:

h_{XX} causada por $\rho_m.v_X.v_X$
h_{XY} causada por $\rho_m.v_X.v_Y$
h_{YY} causada por $\rho_m.v_Y.v_Y$

Si hiciéramos una nueva rotación de ejes $(X,Y,Z)\rightarrow(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ para ver a la masa 'M' moviéndose con componente de velocidad en los 3 ejes coordenados, en la métrica se agregarían perturbaciones en las posiciones $h_{\bar{x}\,\bar{z}}$, $h_{\bar{y}\,\bar{z}}$ y $h_{\bar{z}\,\bar{z}}$.
La ecuación del $[]^2h_{\alpha\beta}$ vs. $T_{\alpha\beta}$ se mantiene para cada celda αβ de las matrices, y la regla genérica es que el casillero $T_{\alpha\beta}$ contiene a la densidad de masa ρ_m multiplicada por las velocidades propias $V_\alpha.V_\beta$ de las masas móviles 'M'.
El producto masa$_x$velocidad es momento, impulso o cantidad de movimiento. Y aparece en Relatividad Especial como parte del cuadrivector energía-momento.
A esta versión de 2 índices $T_{\alpha\beta}$ que nos aparece ahora se la define con el nombre de **TENSOR DE ENERGÍA-IMPULSO**.

10.1 Propiedades básicas.

Veremos con más rigor matemático cómo surge este tensor fuente de gravedad.
Retomamos el escenario planteado en 7.1.3, imaginando un Universo formado inicialmente solo por dos masas: una grande 'M' y una chica 'm_o'. Suponemos que los tamaños verifican $M \gg m_o$, lo que nos permite tratar a m_o como una "*partícula de test*" y aplicarle una formulación Lagrangeana.

$$\mathcal{L}'(X'^h,\dot{X}'^h,\tau) = -m_o.c^2.\sqrt{(1+2\Phi_g'/c^2).\dot{t}'^2 - \dot{x}'^2/c^2 - \dot{y}'^2/c^2 - \dot{z}'^2/c^2}$$

Φ_g' es el potencial creado por la masa 'M' (m_o es chica y no afecta en forma apreciable)
ct',x',y',z' son coordenadas de un referencial Σ' solidario a la masa perturbante 'M'.

Separamos la parte de Minkowski, que es invariante frente a rotaciones espaciales y transformaciones de Lorentz, y la expresamos en forma tensorial.

$$\mathcal{L}'(X'^h,\dot{X}'^h,\tau) = -m_o.c^2.\sqrt{2\Phi_g'/c^2.\dot{t}'^2 + \dot{t}'^2 - \dot{x}'^2/c^2 - \dot{y}'^2/c^2 - \dot{z}'^2/c^2}$$

$$\mathcal{L}'(X'^h,\dot{X}'^h,\tau) = -m_o.c^2.\sqrt{2\Phi_g'/c^2.\dot{t}'^2 - \eta_{\alpha\beta}U'^\alpha U'^\beta/c^2}$$

Realizamos un primer cambio de variable de Lorentz para pasar a un sistema Σ(ct,x,y,z) donde la masa 'M' se ve móvil con velocidad $\vec{v_o}=v_o.\hat{x}$. La parte de Minkowski se mantiene en las coordenadas sin primas.

$$\mathcal{L}(X^h,\dot{X}^h,\tau) = -m_o.c^2.\sqrt{2\Phi_g'/c^2.\dot{t}'^2 - \eta_{\alpha\beta}U^\alpha U^\beta/c^2}$$

La coordenada temporal se convierte como $\dot{t}' = \gamma.(\dot{t} - v_o/c^2.\dot{x})$ con el factor de Lorentz $\gamma^2=1/(1-v_o^2/c^2)$.
Para expresar esto en forma tensorial, observamos que $\gamma.v_o$ es el componente-x de la cuadrivelocidad con que se mueve la masa 'M' en este referencial Σ.

$V^\alpha = \gamma.(c,v_o,0,0)$	componentes contravariantes de la velocidad de 'M'
$V_\alpha = \gamma.(-c,v_o,0,0)$	componentes covariantes
$U^\alpha = (c.\dot{t},\dot{x},\dot{y},\dot{z})$	cuadrivelocidad de la masa de prueba 'm_o'
$V_\alpha.U^\alpha = \gamma.(-c^2.\dot{t} + v_o\,\dot{x} + 0 + 0)$	producto escalar de cuadrivectores
$V_\alpha.U^\alpha = -c^2.\gamma.(\dot{t} - v_o/c^2.\dot{x})$	
$V_\alpha.U^\alpha = -c^2.\dot{t}'$	$\rightarrow \dot{t}' = -V_\alpha.U^\alpha/c^2$

El producto escalar de cuadrivectores es un invariante frente a rotaciones espaciales.
Esto asegura que la expresión se mantiene para una masa 'M' moviéndose con dirección arbitraria.
El factor $\dot{t}'$ aparece elevado al cuadrado en el Lagrangeano, lo calculamos:

$\dot{t}'^2 = (V_\alpha.U^\alpha)^2/c^4$	
$\dot{t}'^2 = (V_\alpha.U^\alpha)(V_\beta.U^\beta)/c^4$	$\rightarrow\beta$=otro índice dummy. No podemos repetir el mismo α
$\dot{t}'^2 = V_\alpha V_\beta.U^\alpha U^\beta/c^4$	$\rightarrow$sustituimos en el Lagrangeano

$$\mathcal{L} = -m_o.c^2.\sqrt{2\Phi_g'/c^2.\dot{t}'^2 - \eta_{\alpha\beta}U^\alpha U^\beta/c^2}$$

$$\mathcal{L} = -m_o.c^2.\sqrt{2\Phi_g'/c^2.V_\alpha V_\beta.U^\alpha U^\beta/c^4 - \eta_{\alpha\beta}U^\alpha U^\beta/c^2} \quad \rightarrow \text{factor común}$$

$$\mathcal{L} = -m_o.c^2.\sqrt{-U^\alpha U^\beta/c^2[\eta_{\alpha\beta} - 2\Phi_g'.V_\alpha V_\beta./c^4]}$$

$$\mathcal{L} = -m_o.c^2.\sqrt{-U^\alpha U^\beta/c^2[\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}]}$$

Tenemos $g_{\alpha\beta}=\eta_{\alpha\beta}+h_{\alpha\beta}$, con $h_{\alpha\beta} = -2\Phi_g'.V_\alpha V_\beta./c^4$
Aplicamos el operador $[]^2$ d'Alembertiano a la perturbación, asumiendo que las velocidades $V_\alpha V_\beta$ son constantes para todos los puntos del espaciotiempo y que no se afectan por la operación de derivada.

$$[]^2 h_{\alpha\beta} = -2.[]^2\Phi_g'.V_\alpha V_\beta./c^4$$
$$[]^2 h_{\alpha\beta} = -2.4\pi G\rho_o.V_\alpha V_\beta./c^4$$
$$[]^2 h_{\alpha\beta} = -8.\pi G/c^4.\ \rho_o V_\alpha V_\beta = -8.\pi G/c^4.\ T_{\alpha\beta}$$

Separamos los factores de escala y le ponemos un nombre a la parte que depende de la masa 'M' y su velocidad: $T_{\alpha\beta}=\rho_o.V_\alpha.V_\beta$.

Supongamos que ahora agregamos nuevas masas perturbadoras a nuestro Universo: M_2, M_3…etc. Cada masa 'M_i' es libre de moverse con velocidad arbitraria, no resulta viable encontrar un sistema de referencia solidario a todas ellas. Ni tampoco podemos pensar en simplificaciones que nos permitan ver movimiento solo en una coordenada. Debemos utilizar la expresión general recién deducida; gracias a la formulación tensorial tenemos asegurada su validez frente a rotaciones espaciales y transformaciones de Lorentz.

En presencia de muchas masas, $T_{\alpha\beta}=\rho_o.V_\alpha.V_\beta$ pasa a interpretarse como un *campo tensorial* cuyo valor varía en cada punto del espaciotiempo de acuerdo con el contenido local de materia-energía.
La ecuación tensorial modela la perturbación $h_{\alpha\beta}$ como suma de las contribuciones de cada una de las masas 'M_i', de acuerdo con las siguientes reglas:

- Para cada pareja de índices αβ, el coeficiente $h_{\alpha\beta}$ adquiere un valor apreciable en la región ocupada por alguna de las masas M_i, donde hay flujos en dirección-α y en dirección-β.
- En vacío, el coeficiente $h_{\alpha\beta}$ es armónico, y cada contribución-i varía inversamente proporcional ($\sim 1/r_i$) a la distancia r_i entre el punto de análisis y la masa móvil M_i.

Aunque aquí debemos realizar una advertencia: cada nueva masa 'M_i' está afectada por la gravedad causada por todas la demás, ya no es estrictamente correcto sostener la suposición de que la velocidad es constante para cada masa. También hay una fuente de imprecisión al bajar índices con la métrica de Minkowski como hicimos en el desarrollo anterior cuando razonábamos $V^\alpha=\gamma.(c,v_o,0,0)\rightarrow V_\alpha=\gamma.(-c,v_o,0,0)$. El factor γ cinemático tampoco es totalmente adecuado, sería más exacto un $\dot{t}$ que modelara la acción conjunta de la gravedad y de la velocidad en su contribución al factor de dilatación temporal. Por estas razones, los resultados solo podrán valer en forma aproximada para regímenes de campos débiles.

10.1.1 Definición de componentes:

El ejemplo reciente de las masas aisladas M_1, M_2…etc nos condujo a la definición $T_{\alpha\beta}=\rho_o.V_\alpha.V_\beta$.
Intentaremos ver que aquello era solo un caso particular de algo más general.
Para que ciertas magnitudes físicas puedan juntarse dentro de un tensor, debe haber alguna regla común que permita definir en forma genérica el componente $T_{\alpha\beta}$, y una forma de buscar esa regla común es explorar ecuaciones que relacionen los componentes del tensor.
Podemos, por ejemplo, tomar la divergencia cuadridimensional. No sería correcto ejecutar $\partial_\alpha T_{\alpha\beta}$, primero debemos subir los índices y pasar a versión contravariante $T^{\alpha\beta}$ para calcular $\partial_\alpha T^{\alpha\beta}$.

Si los campos son débiles y las perturbaciones son pequeñas, es válido subir/bajar índices con las métricas de Minkowski $\eta^{\alpha\beta}$ $\eta_{\alpha\beta}$ en lugar de las métricas completas.
Ya que $|h_{\alpha\beta}|\ll 1$, el error cometido es de orden 2 $|h_{\alpha\beta}|^2\ll|h_{\alpha\beta}|$ y se puede ignorar sin sacrificar precisión.

Observamos que $\tilde{g}^{\alpha\beta}=\eta^{\alpha\beta}-h^{\alpha\beta}$ es una buena aproximación al tensor dual:

$$\begin{aligned}\tilde{g}^{\alpha\beta}\, g_{\beta\lambda} &= (\eta^{\alpha\beta}-h^{\alpha\beta}).(\eta_{\beta\lambda}+h_{\beta\lambda})\\ &= \eta^{\alpha\beta}\,\eta_{\beta\lambda}+\eta^{\alpha\beta}\,h_{\beta\lambda}-h^{\alpha\beta}\,\eta_{\beta\lambda}-h^{\alpha\beta}h_{\beta\lambda}\\ &= \delta^\alpha{}_\lambda+h^\alpha{}_\lambda-h^\alpha{}_\lambda+h^{\alpha\beta}h_{\beta\lambda}\\ &= \delta^\alpha{}_\lambda+h^{\alpha\beta}h_{\beta\lambda}=\text{matriz identidad (}\delta\text{ Kronecker) + residuo de orden } h^2.\end{aligned}$$

Bajo estas hipótesis la elevación de índices repercute únicamente en un cambio de signo en las componentes mixtas espacio-temporales.

Tenemos, para cada uno de los tensores:

$$h^{\alpha\beta}\approx \eta^{\alpha\lambda}.h_{\lambda\mu}.\eta^{\mu\beta}$$
$$T^{\alpha\beta}\approx \eta^{\alpha\lambda}.T_{\lambda\mu}.\eta^{\mu\beta}$$

$h^{\alpha\beta} \approx -2/c^2 *$

[Φ_g	$A_{gx}.c$	$A_{gy}.c$	$A_{gz}.c$	]
[$A_{gx}.c$	o2	o2	o2	]
[$A_{gy}.c$	o2	o2	o2	]
[$A_{gz}.c$	o2	o2	o2	]

$T^{\alpha\beta} \approx$

[$\rho_m.c^2$	$j_{mx}.c$	$j_{my}.c$	$j_{mz}.c$	]
[$j_{mx}.c$	o2	o2	o2	]
[$j_{my}.c$	o2	o2	o2	]
[$j_{mz}.c$	o2	o2	o2	]

Una comodidad de utilizar la forma contravariante es que $A_g^{\rightarrow}$ y Φ_g aparecen con el mismo signo.
Lo mismo ocurre con ρ_m y $j_m^{\rightarrow}$.

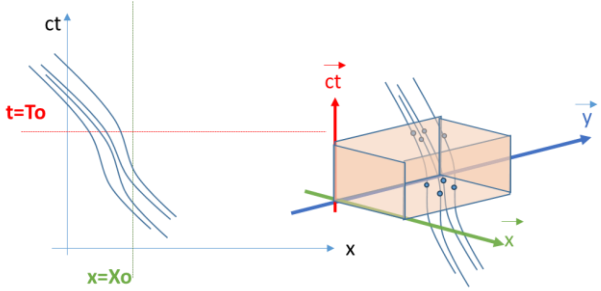
La divergencia de la columna-0 del tensor de energía-impulso queda:

$$\partial_\alpha T^{\alpha 0} = 1/c.\partial_t(T^{00}) + \partial_x T^{x0} + \partial_y T^{y0} + \partial_z T^{z0}$$
$$= \partial_t(c.\rho_m) + \partial_x(c.j_{mx}) + \partial_y(c.j_{my}) + \partial_z(c.j_{mz})$$
$$= c.\,[\partial_t(\rho_m) + \nabla \cdot j_m^{\rightarrow}] = 0$$

Esta divergencia es nula y está expresando una ley de conservación de la energía (o masa equivalente).
El componente T^{i0} mide flujo por unidad de tiempo y área de esa energía, para i=x,y,z respectivamente.
El componente T^{00} mide densidad volumétrica de la energía.

Si graficamos en un diagrama espaciotiempo las trayectorias de las masas móviles, veremos que densidad volumétrica y flujo de transporte son esencialmente lo mismo.

- La cantidad de líneas que cortan una frontera $x=X_o$ cte, en un intervalo Δt, es proporcional al flujo de transporte a través de una superficie con vector normal $x^{\rightarrow}$.
- La cantidad de líneas que cortan la frontera $t=T_o$ cte, en un segmento Δx, es indicativa de la densidad volumétrica → o sea, la cantidad de masas que hay presentes en este instante 't'.

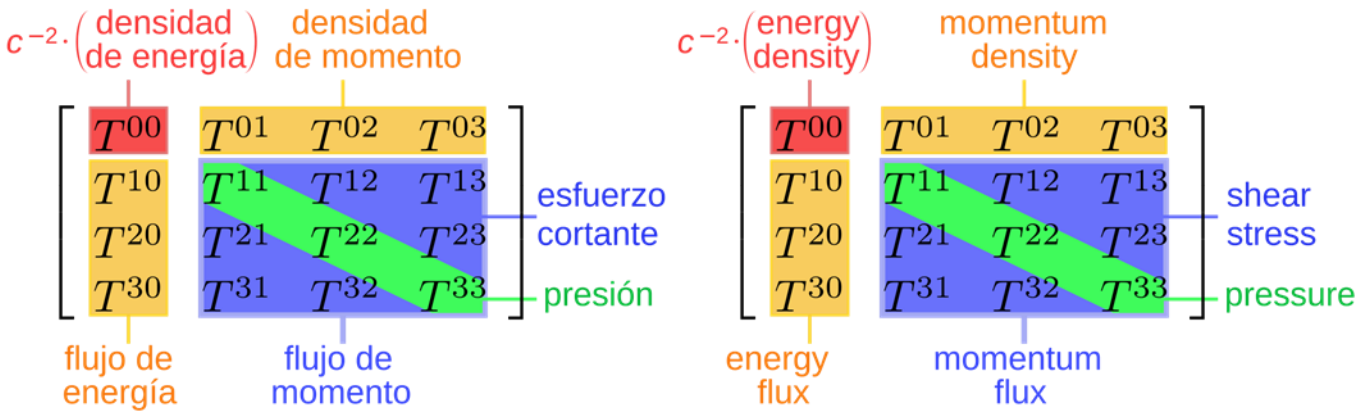


→Entonces identificaríamos al índice 'α' como indicador de la coordenada que permanece constante en el análisis, y $T^{\alpha\beta}$ son flujos a través de fronteras X^α=cte.

¿Qué es lo que fluye?
En el caso β=0, lo que fluye es la energía.
En Teoría de la Relatividad la energía no es un escalar invariante sino el componente-0 de un tensor llamado cuadrimomento P^β=(E/c, px, py, pz).
→Entonces identificaríamos al índice 'β' como descriptor de la componente del momento que fluye.

Las casillas T^{0j} serían densidad volumétrica de la componente-j de la cantidad de movimiento, lo que parece en principio coherente con el hecho de encontrarnos allí los valores j_{mx}, j_{my}, j_{mz}.

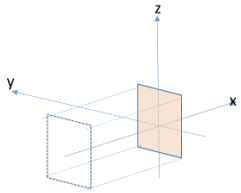
Formulamos la siguiente definición:
El casillero $T^{\alpha\beta}$ mide densidad o flujo de la componente-β del momento a través de fronteras X^α=cte.
Con eventual ajuste de unidades para armonizar espacio=tiempo y energía=cantidad de movimiento (ajuste que no sería necesario ni visible para quienes manejan unidades en las que c=1).



Fuente: https://es.wikipedia.org/wiki/Tensor_de_energ%C3%ADa-impulso#/media/Archivo:StressEnergyTensor_contravariant_es.svg.
Esta definición general contempla a $T_{\alpha\beta}=\rho_o.V_\alpha.V_\beta$. como un caso particular.

10.1.2 Simetría:

Llama la atención la igualdad de componentes en la primera fila y en la primera columna, por ejemplo $T^{1o}=T^{o1}=j_{mx}.c$ ¿Esto es algo casual o estamos frente a una propiedad general?
Aplicamos la definición general:
T^{10} es flujo de momento-0 por unidad de tiempo y área a través de superficies con coordenada X^1=cte.
Momento-0 es $P^0=E/c$, siendo E=energía
¿Cuánta energía cruza un área $\Delta y.\Delta z$ durante un tiempo Δt?
Toda la que está contenida en un paralelepípedo de área $\Delta y.\Delta z$ y altura $u_x^{\rightarrow}.\Delta t$.



Volumen	$\Delta Vol = \Delta y.\Delta z.\ u_x.\Delta t$
masa	$\Delta m = \rho_m.\Delta Vol = \rho_m.\ \Delta y.\Delta z.\ u_x.\Delta t$
energía	$E= \Delta m.c^2 = \rho_m.c^2.\Delta y.\Delta z.\ u_x.\Delta t$
momento-0	$P^0=E/c = \rho_m.c.\Delta y.\Delta z.\ u_x.\Delta t$
T^{10}	$= P^0/(\Delta y.\Delta z.\Delta t) = \rho_m.c.u_x$

Por otro lado, T^{01} es densidad volumétrica de momento-1, escalada por un factor 'c' para que tenga las mismas unidades que T^{00}=densidad volumétrica de energía.

volumen	$\Delta Vol=\Delta x.\Delta y.\Delta z$
masa	$\Delta m=\rho_m.\Delta Vol= \rho_m.\Delta x.\Delta y.\Delta z$
momento-1	$P^1= u_x.\Delta m = u_x.\ \rho_m.\Delta x.\Delta y.\Delta z$
c.momento-1	$c.P^1= c.u_x.\ \rho_m.\Delta x.\Delta y.\Delta z$
T^{01}	$c.P^1/\Delta Vol = c.u_x.\rho_m$

La igualdad $T^{10}=T^{01}$ es un caso particular de una simetría general $T^{\alpha\beta}=T^{\beta\alpha}$.
Para el caso de las masas aisladas con $T^{\alpha\beta}=\rho_o U^\alpha U^\beta$ la igualdad es trivial, pero puede haber otras configuraciones de tensor $T^{\alpha\beta}$ que requieran un estudio adicional.

Comentario: En varios materiales consultados encontramos figuras que difieren levemente de la obtenida de Wikipedia: los autores llaman "densidad de momento" a la columna espaciotemporal [T10,T20,T30] y "flujo de energía" a la fila [T01,T02,T03], al revés que nosotros. Debemos acostumbrarnos a leer fuentes que manejan distinta nomenclatura y estar atentos para evitar confusiones. Los resultados deben ser los mismos en virtud de la simetría $T^{i0}=T^{0i}\ \forall i$.

10.1.3 Leyes de conservación:

La divergencia del tensor es $\partial_\alpha T^{\alpha\beta}$, que para la columna temporal $\beta=0$ la calculamos recién como:

$$\partial_t(\rho_m) + \nabla\cdot(\vec{j_m}) = 0$$

Esta divergencia es nula y está expresando la conservación de la masa, en forma muy similar a la Ecuación de Continuidad de la carga eléctrica. De acuerdo con el Principio de Covarianza 9.6, *no tiene significado especial que se anule una parte limitada de un vector o tensor*. Las leyes físicas invariantes surgen de anular vectores o tensores completos, lo que nos motiva a tomar divergencia a las restantes columnas espaciales →si nos dan nulas, habremos encontrado una ley de divergencia nula del tensor total.

Comenzamos por la columna-x $= \rho_m.(c.u_x,\ u_x.u_x,\ u_y.u_x,\ u_z.u_x)$

$= \rho_m.u_x.(c,\ u_x,\ u_y,\ u_z)$

$= \rho_m.u_x.(c,\vec{u})$

$$T^{\alpha\beta} = \rho_m.\begin{bmatrix} c.c & c.u_x & c.u_y & c.u_z \\ u_x.c & u_x.u_x & u_x.u_y & u_x.u_z \\ u_y.c & u_y.u_x & u_y.u_y & u_y.u_z \\ u_z.c & u_z.u_x & u_z.u_y & u_z.u_z \end{bmatrix}$$

$$\partial_\alpha T^{\alpha 1} = \partial_{ct}(\rho_m.c.u_x) + \nabla\cdot(\rho_m.u_x\vec{u}) = \partial_t(\rho_m.u_x) + \nabla\cdot(\rho_m u_x.\vec{u})$$

Esto expresa la ley de conservación de la componente-x del momento por unidad de volumen $\rho_m.u_x$.
Es una ecuación de flujo de transporte similar a la ecuación de continuidad, lo que cambia es la magnitud que está siendo transportada y conservada: $\rho_m.u_x$ en vez de ρ_m.

Podemos operar un poco para que adquiera la forma de una ecuación de movimiento.

$\partial_\alpha T^{\alpha 1} = \partial_t(\rho_m.u_x) + \nabla\cdot(\rho_m u_x.\vec{u})$ →derivada del producto

$= u_x.\partial_t(\rho_m) + \rho_m.\partial_t(u_x) + \nabla\cdot(\rho_m u_x.\vec{u})$

$= u_x.\partial_t(\rho_m) + \rho_m.\partial_t(u_x) + \nabla\cdot(\rho_m u_x.\vec{u})$ →divergencia de un escalar por un vector

$= u_x.\partial_t(\rho_m) + \rho_m.\partial_t(u_x) + u_x.\nabla\cdot(\rho_m.\vec{u}) + \rho_m\vec{u}\cdot\nabla(u_x)$

Ahora re-agrupamos:

$\partial_\alpha T^{\alpha 1} = u_x.\partial_t(\rho_m) + u_x.\nabla\cdot(\rho_m.\vec{u}) + \rho_m.\partial_t(u_x) + \rho_m\vec{u}\cdot\nabla(u_x)$ →factor común

$\partial_\alpha T^{\alpha 1} = u_x.[\partial_t(\rho_m) + \nabla\cdot(\rho_m.\vec{u})] + \rho_m.[\partial_t(u_x) + \vec{u}\cdot\nabla(u_x)]$ →conservación de la masa

$\partial_\alpha T^{\alpha 1} = u_x.[0] + \rho_m.[\partial_t(u_x) + \vec{u}\cdot\nabla(u_x)]$

$\partial_\alpha T^{\alpha 1} = \rho_m.[\partial_t(u_x) + \vec{u}\cdot\nabla(u_x)]$ →derivada direccional o "viajera"

$\partial_\alpha T^{\alpha 1} = \rho_m.d(u_x)/d\tau$

¿Distintas versiones de $T^{\alpha\beta}$?:

Aquí tenemos el producto de una masa por una aceleración, estamos ante a una ecuación de movimiento.

→Una primera observación que podemos realizar es que nos están faltando los términos de **fuerza**. Estos términos podrían recibir una contribución si la divergencia de la parte espacial del tensor de tensiones se interpretara como fuerza por unidad de volumen. Ya vimos en la sección 8.4.3 un tensor con esa misma propiedad, era el tensor de tensiones clásico $\{\sigma_{ij}\}$.
Podemos concebir una versión alternativa del tensor de energía-impulso, si "*rellenamos*" la parte espacial 3x3 [T^{ij} con i,j en el rango espacial 1..3] con el tensor de tensiones clásico {σij}.

$$T^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} c^2.\rho_m & ? & ? & ? \\ ? & \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ ? & \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ ? & \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

En la diagonal van las presiones y a los costados de la diagonal van los esfuerzos cortantes, en ambos casos representan fuerzas por unidad de área.

El tensor de energía-impulso que acabamos de definir en forma más amplia mide flujos de cantidad de movimiento por unidad de tiempo y área. Ya que fuerza es dimensionalmente impulso por unidad de tiempo, podría tener sentido ubicar en este "*hueco*" del T^{ij} el σ[i,j] clásico.

La divergencia de las columnas 1-2-3 genera la ecuación:
$\partial_t \vec{j_m} + \nabla \cdot \{\sigma ij\} = 0$
Así se describe la evolución dinámica de los flujos de materia $\vec{j_m}$ en función de las fuerzas volumétricas.
Ejemplo: Si en la diagonal espacial del tensor se ubican las presiones $\sigma_{xx}=p$, entonces en la ecuación de fuerzas según 'x' aparece $\partial_t j_{mx} = -\partial_x p$ (gradiente de presión).
La ecuación $\partial_\alpha T^{\alpha j}=0$, para cada valor j=1,2,3, es un balance de fuerzas y momentos en dirección-j.

Al inicio de esta sección calculábamos las perturbaciones métricas producidas primero por transformación de Lorentz y luego por rotaciones espaciales. El resultado sugería una forma levemente diferente para el tensor de energía-impulso ($T^{\alpha\beta}=\rho.U^\alpha.U^\beta$), sin presiones en la diagonal.
Cabe preguntarse si estamos frente a un conflicto o si es posible encontrarle un sentido a esta aparente incompatibilidad. A partir de la próxima sección 10.2 veremos que es coherente considerar distintas versiones del tensor $T^{\alpha\beta}$→ esto es así para adaptarse a las diferentes configuraciones de materia-energía como campos electromagnéticos, polvo, gas, líquido o sólido. Por ejemplo, en el interior de un planeta compacto las masas están quietas, no hay velocidades v_i^2, $v_i.v_j$ en los casilleros espaciales. Pero sí hay tensiones que deben estudiarse.

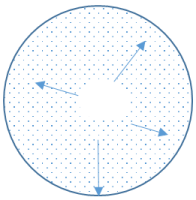
→La segunda observación que formulamos es que falta la fuerza gravitatoria, es decir, el peso. Los cálculos matemáticos que realizamos hasta el momento son coherentes con esta omisión, porque al tomar divergencia utilizando derivada coordenada ∂_α estamos implícitamente ignorando la curvatura del espacio-tiempo y por lo tanto la gravedad.
Si en lugar de ∂_α usamos la *derivada covariante* ∇_α, como dictan los principios de mínimo acople y covarianza del capítulo 9, deberían aparecer las fuerzas interpretables como gravitatorias, "escondidas" en los símbolos de Christoffel de métrica curva.
Lo que antes nos dio $\rho_m.du_x/d\tau=0$ se convierte en $\rho_m.Du_x/D\tau=0$, con $D/D\tau$ en lugar de $d/d\tau$. Significa que los flujos másicos siguen trayectorias "libres", tan libres como lo permite la gravedad local.

➔ La correcta ecuación de conservación de la masa-energía es, por lo tanto: $\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$.

Válida para cualquier configuración de materia, energía, tensiones, esfuerzos…etc

10.1.4 Coordenadas curvilíneas:

Para convencernos de que es necesario recurrir a la derivada covariante, imaginamos el siguiente escenario:



En un espaciotiempo plano, sin gravedad, una nube de partículas sale disparada desde el origen de coordenadas con movimiento únicamente radial. Su tensor de energía-impulso toma la forma:

$T^{\alpha\beta} =$

$\alpha \setminus \beta$	ct	r	θ	φ
ct	$\rho_m.c^2$	$\rho_m.c.u_r$	0	0
r	$\rho_m.c.u_r$	???	0	0
θ	0	0	???	0
φ	0	0	0	???

Las funciones son $\rho_m(r,t)$ y $u_r(r,t)$, asumimos que hay simetría esférica sin dependencia θ, φ.

El componente T^{rr} lo marcamos con signo de interrogación porque depende de la presión y posiblemente de otros parámetros que no nos interesa estudiar en esta sección. Queremos concentrarnos en el balance de masa y energía, es decir, en la columna β=0 del tensor $T^{\alpha\beta}$.

La ecuación de conservación correcta no es $\partial_\alpha T^{\alpha\beta}$ para β=0.

Tomar divergencia con derivada coordenada nos conduciría al resultado incorrecto $\partial_t\rho_m + \partial_r(\rho_m.u_r) = 0$.

En geometrías esféricas la divergencia correcta es $1/r^2.\partial_r(r^2.\rho_m.u_r)$, que surge al aplicar las fórmulas de derivada covariante $\nabla_\alpha T^{\alpha\beta}=0$. Además: en geometrías curvas no es apropiado tomar divergencia de filas o de columnas de un tensor tratándolas como si fueran vectores.

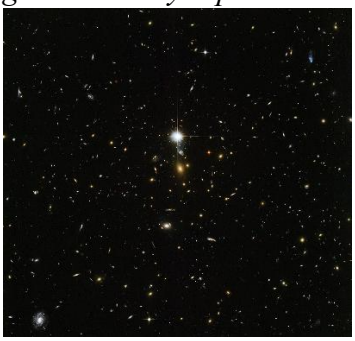
Reflexión: En el espacio-tiempo plano de la Relatividad Especial, es nuestra elección si queremos utilizar coordenadas curvilíneas (para las cuales es necesaria la sustitución de ∂_α por ∇_α) o si por el contrario preferimos utilizar coordenadas rectangulares. Todo el entrenamiento que hagamos para acostumbrarnos a manejar la derivada covariante rendirá sus frutos en los espaciotiempos de la Relatividad General donde no habrá elección posible: las coordenadas siempre van a ser curvilíneas por la propia curvatura causada por las masas. A lo sumo podrán calificarse como “cuasi-cartesianas” o “cuasi-rectangulares”.

10.2 Fuentes de energía.

Abordamos a continuación el estudio del tensor de energía-impulso correspondiente a distintas configuraciones de masa-energía: polvo, fluido, materia sólida y campos electromagnéticos.

10.2.1 Polvo cósmico:

El ejemplo más simple se llama polvo cósmico (en inglés "*dust*"). Se le da este nombre a la materia interplanetaria o interestelar, es decir, a un conjunto de partículas dispersas que solo interactúan gravitacionalmente sin entrar en contacto unas con otras. *Curiosidad: A escala cósmica, las estrellas y galaxias -muy separadas entre sí- también podrían modelarse como "puntos"o partículas de "polvo".*



Fuente: https://es.wikipedia.org/wiki/Agrupaci%C3%B3n_gal%C3%A1ctica

Supongamos que en cierta región del espacio hay materia moviéndose con una determinada velocidad.
Orientamos los ejes tal que la velocidad tenga solo componente-x → $\vec{u} = (v,0,0)$.
Luego consideramos 2 sistemas de referencia ligados entre sí por una transformación de Lorentz:

- Σ' se mueve solidario al polvo, allí se ve la masa en reposo con densidad propia ρ_0.
- Σ ve a las masas moviéndose

En un cierto volumen $\Delta Vol=\Delta x.\Delta y.\Delta z$, ¿cuánta masa hay?
Primero debemos convertir a dimensiones *primas*, observando que $\Delta x = \Delta x'/\gamma$ debido al efecto de contracción de longitudes con factor $\gamma=1/\sqrt{1-v^2/c^2}$.

$\Delta y'=\Delta y$ $\Delta z'=\Delta z$ porque las longitudes transversales al movimiento no se alteran.

Luego calculamos $\Delta m'$ aprovechando que en Σ' el cálculo es inmediato porque la masa está en reposo:
$\Delta m' = \rho_o.\Delta x'.\Delta y'.\Delta z' = \gamma.\rho_o.\Delta x.\Delta y.\Delta z$ masa en reposo
$\Delta m = \gamma.\Delta m'$ por el efecto relativista que hace que una masa móvil "pese" más al moverse
$\Delta m = \gamma^2.\rho_o.\Delta x.\Delta y.\Delta z = \gamma^2.\rho_o.\Delta Vol$
$\rho = \Delta m/\Delta Vol$ $\rho = \gamma^2.\ \rho_o$
→Hay 2 factores gamma que se multiplican:
uno por contracción de longitudes y aumento de densidad
otro por incremento relativista de la masa móvil (masa propia + energía cinética).

En Σ' el tensor energía-impulso es $T'^{\lambda\mu}$ =

$$\begin{bmatrix} c^2.\rho_o & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La transformación de Lorentz aplicada al cambio de variable Σ vs. Σ' da: $T^{\alpha\beta} = \partial X^{\alpha}/\partial X'^{\lambda}.\partial X^{\beta}/\partial X'^{\mu}.T'^{\lambda\mu}$
Matricialmente esto es una multiplicación a la izquierda y a la derecha por las matrices de Lorentz que son los jacobianos del cambio de variables.
En la sección 5.6.4 aplicábamos este doble producto matricial al tensor de campo electromagnético y advertíamos que era una forma general para cualquier tensor de segundo rango, si cuidamos bien de colocar los índices arriba o abajo según su varianza. Luego en el capítulo 6.5 lo repetíamos para el tensor métrico.

Ejercicio: Hacer las operaciones matriciales y verificar que el resultado es:
$T^{00}=\gamma^2.\rho_o.c^2 = (\gamma.c).\rho_o.(\gamma.c) = \rho_o.U^0.U^0$
$T^{01}=\beta.\gamma^2.\rho_o.c^2 = (\gamma.c).\rho_o.(\gamma.v) = \rho_o.U^0.U^1$
$T^{11}=\beta^2.\gamma^2.\rho_o.c^2 = (\gamma.v).\rho_o.(\gamma.v) = \rho_o.U^1.U^1$
→*Los factores γ^2 surgen debido a que multiplicamos 2 veces por el jacobiano*.

Esto que razonamos para una orientación simplificada de ejes se puede extender a una orientación arbitraria donde el flujo de materia tenga componentes en todas las direcciones.
La expresión genérica es: $T^{\alpha\beta} = \rho_o.U^\alpha U^\beta$ $\{T\} = \rho_o.\vec{U}\otimes\vec{U}$
El tensor de energía-impulso, para el polvo interestelar, es proporcional al producto tensorial del cuadrivector velocidad propia consigo mismo.
Reflexión-1: Llegamos a la misma expresión que al inicio de este capítulo 10, lo cual tiene sentido porque estábamos considerando gravedad producida por masas aisladas M_1, M_2, M_3…etc
Reflexión-2: La simetría queda manifiesta $T^{\alpha\beta}=T^{\beta\alpha}$
Reflexión-3: $T^{oo}=\rho_o.U^oU^o$
$T^{oo}=\rho_o.\dot{t}^2.c^2$
$T^{oo}=\rho_o.\dot{t}^2.c^2$
$T^{oo}=\rho.c^2$
Aunque las masas estén en reposo, en cualquier caso seguiría valiendo $\rho=\rho_o.\dot{t}^2$
Habría una densidad volumétrica efectiva mayor a la densidad propia, y sería interesante encontrarle una interpretación basada en la contracción de longitudes, como hicimos con el caso de masas móviles. Las fórmulas están sugiriendo la idea de que las masas ubicadas en regiones de dilatación temporal intensa deberían *pesar* más a los efectos de producir mayores perturbaciones gravitacionales en su vecindad.

Ejercicio: Demostrar que este tensor $T^{\alpha\beta}=\rho_oU^\alpha U^\beta$ tiene nula su divergencia covariante $\nabla_\alpha T^{\alpha\beta}=0$.
Sugerencia: Aplicar derivada del producto. En algún momento de la demostración conviene tener presente la ecuación geodésica $U^\alpha\nabla_\alpha(U^\beta)=DU^\beta/D\tau=0$, lo que significa que los flujos de materia se mueven siguiendo las líneas geodésicas dentro de la geometría perturbada por las demás masas.
El otro detalle a tener en cuenta es que es $\nabla_\alpha(\rho_oU^\alpha)$ es nulo. Se puede demostrar pasando a un referencial inercial donde $\nabla_\alpha \approx \partial_\alpha$, y el referencial más lógico para este contexto es uno que acompañe al polvo (es inercial porque sigue las líneas de caída libre).

10.2.2 Fluido perfecto:

El concepto de fluido "perfecto" o "ideal" incluye las siguientes propiedades:

- solo efectos de presión, cero viscosidad.
- cero transmisión de calor.
- movimiento con velocidades significativamente menores a la de la luz.

Si el fluido bajo estudio es un *gas* estaríamos frente a una extensión del concepto de polvo. Las partículas ya no están tan dispersas como en el caso del polvo. Al encimarse unas a otras, chocan y aleatorizan su velocidad individual luego de cada colisión. *Incluso en situación de reposo macroscópico*, hay involucradas velocidades y cantidades de movimiento.
No las llamamos U^α porque reservaríamos el nombre U^α para las velocidades macroscópicas (el promedio local de las microscópicas). Pero lo cierto es que hay que tener en cuenta estas velocidades microscópicas que se asocian a choques y a transmisión de cantidad de movimiento, es decir, fuerza.
Recordemos que según la definición más general, el componente T^{xx} del tensor de energía-impulso es flujo de momento por unidad de tiempo y área. Un análisis dimensional revela que **momento por unidad de tiempo es fuerza, y fuerza por unidad de área es presión**. O sea que debemos esperar la presencia de presiones en la diagonal espacial del tensor $T^{\alpha\beta}$.

Repetimos el argumento de la sección anterior, considerando velocidad en una sola dimensión-x.
Luego aplicamos transformación de Lorentz con el sistema en reposo,

y finalmente generalizamos a flujo arbitrario en todas las dimensiones.

En Σ' (solidario al fluido) el tensor energía-impulso es: $T'^{\alpha\beta}$ =

$$\begin{bmatrix} c^2.\rho_o & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{bmatrix}$$

(*En un fluido no-perfecto podría haber flujos de calor en* T'^{i0}*, no es nuestro caso*)

El producto a la izquierda y a la derecha por las matrices de Lorentz da:

$$\begin{bmatrix} \gamma^2.(\rho_o.c^2+\beta^2.p) & \gamma^2.(\beta.\rho_o.c^2+\beta.p) & 0 & 0 \\ \gamma^2.(\beta.\rho_o.c^2+\beta.p) & \gamma^2.(\rho_o.\beta^2.c^2+p) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{bmatrix}$$

Operando un poco nos queda:

- $T^{00} = \gamma^2.(\rho_o.c^2 + \beta^2.p) =$
  $= \gamma^2.(\rho_o.c^2 + p - p + \beta^2.p)$
  $= \gamma^2.(\rho_o.c^2 + p) + \gamma^2.(-p + \beta^2.p)$
  $= \gamma^2.c^2.(\rho_o + p/c^2) - \gamma^2.p.(1-\beta^2)$
  $= (\gamma.c).(\gamma.c).(\rho_o + p/c^2) - p$
  $= U^0.U^0.(\rho_o + p/c^2) - p$
- $T^{01} = \gamma^2.\beta.(\rho_o.c^2+p)$
  $= \gamma^2.\beta.c^2.(\rho_o + p/c^2)$ $\rightarrow \beta=v/c$
  $= \gamma^2.v.c.(\rho_o + p/c^2)$
  $= (\gamma.c).(\gamma.v).(\rho_o + p/c^2)$
  $= U^0.U^1.(\rho_o + p/c^2)$
- $T^{11} = \gamma^2.(p + \rho_o.\beta^2.c^2)$
  $= \gamma^2.(p + \rho_o.v^2)$
  $= \gamma^2.(p - v^2/c^2.p + v^2/c^2.p + \rho_o.v^2)$
  $= \gamma^2.p.(1 - v^2/c^2) + \gamma^2.(v^2/c^2.p + \rho_o.v^2)$
  $= p + \gamma^2.v^2.(p/c^2 + \rho_o)$
  $= p + (\gamma.v).(\gamma.v).(p/c^2 + \rho_o)$
  $= p + U^1.U^1.(p/c^2 + \rho_o)$

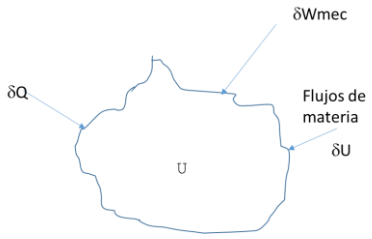
Extendemos el razonamiento a las restantes dimensiones que faltan.
La regla genérica es que se mantiene el producto tensorial $U^\alpha.U^\beta$, pero modulado por un factor diferente que en el caso del polvo. Luego se resta la presión en la diagonal temporal, y se suma la presión en la diagonal espacial. Lo cual es expresable en forma simplificada con el tensor de Minkowski diag(-1,+1,+1,+1).

$$T^{\alpha\beta} = (\rho_o+p/c^2).U^\alpha U^\beta + p.\eta^{\alpha\beta}$$

Advertencia-1: en algunos textos puede aparecer cambiado $-p.\eta^{\alpha\beta}$ en lugar de $+p.\eta^{\alpha\beta}$, si los autores definen la métrica de Minkowski con la signatura diag(+,-,-,-) opuesta a la nuestra (–,+,+,+).
Advertencia-2: Esta ecuación también puede encontrarse como $T^{\alpha\beta} = (\rho_o+p/c^2).U^\alpha U^\beta + p.g^{\alpha\beta}$ con $g^{\alpha\beta}$ en lugar de $\eta^{\alpha\beta}$. El cambio surge de aplicar el *Principio de Mínimo Acople de la sección 9.4*, generalizando a espacios arbitrarios lo que se razonó para espacios planos. En este caso los factores 'γ' ya no valdrían $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ pero seguirían identificándose como el factor $\dot{t}=U^o/c$ de los flujos másicos, factor que modelaría los efectos de dilatación temporal cinemática y también gravitacional, por influencia de las restantes masas.

La presencia de la presión sumando a la densidad $(\rho+p/c^2)$ puede interpretarse como un incremento efectivo de la inercia. A igual 'ρ', un fluido con alta 'p' es más difícil de acelerar y transmite más impulso cuando impacta. Parece ser un efecto similar al del factor cinemático γ .

Análisis termodinámico:
Recordamos a grandes rasgos el Primer Principio de la Termodinámica para Sistemas Abiertos.



Utilizamos como norma que todo lo que entra al volumen de control es positivo, y lo que sale es negativo.
U=energía interna del sistema, $\vec{n}$ = vector normal entrante a la superficie en cada punto.
El Primer Principio se formula como $\iiint dU = \iint (\delta Q + \delta W + \delta U)$

El flujo de masa a través de la superficie representa un flujo energético por la relación de Einstein $E=mc^2$.

$\delta U = \rho c^2.dVol$

$\delta U = \rho c^2.\vec{u}dt\cdot\vec{n}dA$ (dA=diferencial de área o elemento de superficie)

δQ es calor entrante, podría calcularse en base a una magnitud vectorial $j_Q\vec{}$, corriente calorífica por unidad de tiempo y área. Normalmente se omite de los modelos de fluido perfecto.
Lo que no se omite del modelo de fluido es el hecho de que δW_{mec} solamente contabiliza el trabajo mecánico entregado al sistema. Para completar el δW total hace falta considerar también el trabajo hidráulico, el necesario para inyectar un volumen de fluido en contra de la presión local.

$\delta W_{hid} = p.dVol$

En el balance energético total, podemos agrupar el término δU con el término δW_{hid}.

$\delta U+\delta W_{hid} = (\rho c^2+p).dVol$

$\delta U+\delta W_{hid} = (\rho c^2+p).\vec{u}dt\cdot\vec{n}dA$

Esto significa que $(\rho c^2+p).\vec{u}$ se comporta como un flujo energético efectivo, y tiene sentido que aparezca en la columna temporal-espacial del tensor de energía-impulso de un fluido.

Análisis tensorial:
Al avanzar en este trabajo trataremos de adquirir entrenamiento en la subida y bajada de índices; en muchas ocasiones utilizaremos formas tensoriales mixtas que no son puramente covariantes ni contravariantes.
Por ejemplo, el tensor de un fluido en reposo tiene la forma mixta:
$T^{\alpha}{}_{\beta} =:$

$$\begin{bmatrix} -c^2.\rho_o & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{bmatrix}$$

¡Atención al signo de (-)! Si estamos en métrica plana y subimos el índice β, restauraríamos el signo positivo para T^{00}. Pero este razonamiento que estamos presentando ahora es más genérico, resiste un cambio a coordenadas curvilíneas o a un espacio con gravedad.

El fluido en reposo tiene cuadrivelocidad $U^{\alpha}=(c.t\cdot,0,0,0)$, $U_{\beta}=(g_{oo}.c.t\cdot,0,0,0)$.
El producto tensorial $U^{\alpha}U_{\beta}$ tiene un único casillero no nulo en $\alpha=0$ $\beta=0$, de valor $g_{oo}.c^2.t\cdot^2$.
Es numéricamente igual al producto escalar $U_{\alpha}U^{\alpha}$, que por normalización sabemos debe valer $-c^2$.
Deducimos por lo tanto que $g_{oo}.t\cdot^2=-1$, y que el primer componente del tensor de energía-impulso queda:
$\rho_o.U^{\alpha}U_{\beta} =$

$$\begin{bmatrix} -c^2.\rho_o & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

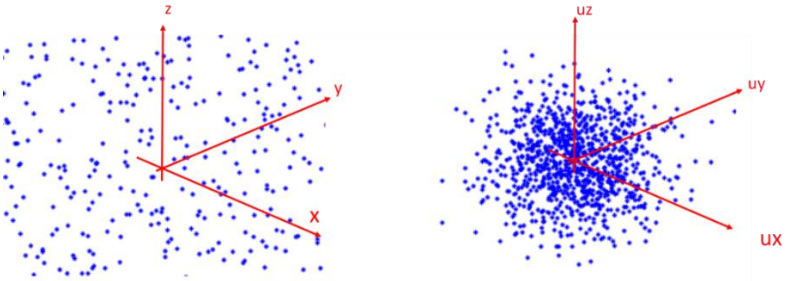
Para hacer aparecer la presión en la diagonal temporal sumamos $p.g^{\alpha}{}_{\beta}$, ($g^{\alpha}{}_{\beta}=\delta^{\alpha}{}_{\beta}$ es la matriz identidad) pero eso genera un sumando parásito en el casillero temporal (0,0) que debemos restar. La suma completa resulta:

$(\rho_o.+p/c^2).U^\alpha U_\beta =$ + $p.g^\alpha{}_\beta =$

$$\begin{bmatrix} -c^2.\rho_o-p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{bmatrix}$$

Expresable como: $T^\alpha{}_\beta = (\rho_o+p/c^2).U^\alpha U_\beta + p.g^\alpha{}_\beta$

<u>Análisis semi-clásico</u>:
Las fórmulas recién presentadas aplican a cualquier fluido perfecto, con cualquier ecuación de estado ρ(p).
En el caso particular de un gas ideal, puede llegarse a este resultado a partir del concepto de polvo.
Consideramos una porción de volumen 'V' de fluido gaseoso con 'N' partículas de masa molecular m̃.
Si las graficamos en el espacio geométrico (x,y,z) vemos una nube de partículas con posiciones aleatorias y velocidades aleatorias (figura izquierda).



Sin embargo, si las graficamos en el *espacio de las velocidades* (u_x,u_y,u_z) la aleatoriedad cambia (figura derecha). Una fracción significativa de las partículas se ubica en una bola de radio 'v_T', siendo v_T una velocidad media de agitación térmica. La proporción de partículas con velocidades más altas decae exponencialmente de acuerdo con el factor estadístico de Maxwell-Boltzmann $\exp[-E/(k_B.T)]$.
$E = ½.\tilde{m}.(u_x^2+u_y^2+u_z^2)$=energía cinética clásica, k_B=constante de Boltzmann, T=temperatura absoluta.
La exponencial queda de la forma $\exp[-½.(u_x^2+u_y^2+u_z^2)/v_T^2)$, $v_T^2 = k_B.T/\tilde{m}$.

Un corte con u_y=cte, u_z=cte muestra una distribución gaussiana de probabilidades de 'u_x', con media nula $\langle u_x\rangle = 0$ y varianza $\langle u_x^2\rangle = v_T^2$.
Lo mismo para las demás direcciones $\langle u_y\rangle = \langle u_z\rangle = 0$, $\langle u_y^2\rangle = \langle u_z^2\rangle = v_T^2$

Con este modelo microscópico podemos estimar los componentes del tensor de energía-impulso en un referencial solidario al fluido. Cada partícula(i) aporta un $T^{\alpha\beta}(i)=\rho_o.U^\alpha U^\beta \neq 0$ y aleatorio, pero para el fluido los valores relevantes son los promedios $\langle T^{\alpha\beta}\rangle=\rho_o.\langle U^\alpha U^\beta\rangle$ que son en su mayoría nulos salvo en la diagonal. Ejemplo: $\langle T^{0x}\rangle = \rho_o.\langle U^0U^x\rangle = \rho_o.c\langle \gamma^2 u_x\rangle$.
A bajas velocidades térmicas $v_T \ll c$, y en el referencial de reposo, podemos ignorar el γ relativista, $\gamma\approx 1$.

$\langle T^{0x}\rangle = \rho_o.c\langle u_x\rangle = 0$

$\langle T^{xy}\rangle = \rho_o.\langle u_x\, u_y\rangle = \rho_o.\langle u_x\rangle . \langle u_y\rangle = \rho_o.0.0 = 0$

El último paso se justifica por la ausencia de correlación entre los componentes de la velocidad, lo que asegura que la media del producto sea el producto de los valores medios.
Mediante argumentos similares se puede deducir que son nulos todos los términos fuera de la diagonal.
Solo los casilleros de la diagonal sobreviven al promedio:

$\langle T^{00}\rangle = \rho_o.c^2$

$\langle T^{xx}\rangle = \rho_o.\langle u_x^2\rangle \approx \rho_o.\, v_T^2$

$\langle T^{yy}\rangle = \rho_o.\langle u_y^2\rangle \approx \rho_o.\, v_T^2$

$\langle T^{zz}\rangle = \rho_o.\langle u_z^2\rangle \approx \rho_o.\, v_T^2$ = es lo que llamamos presión 'p'

$p=\rho_o.\, v_T^2 = \tilde{m}.N/V.\, T.k_B/\tilde{m}$

$p.V = N.k_B.T$ es la ecuación de estado de un gas ideal clásico.

<u>Advertencia</u>: El gas ideal no cumple todas las propiedades del fluido perfecto relativista; estos argumentos solo son válidos en regímenes de flujo en los que la viscosidad, los cambios de densidad y la transmisión de calor no son importantes.

Si el fluido tiene movimiento macroscópico v_o en alguna dirección, por ejemplo en 'x', pasa a ser $\langle u_x\rangle \neq 0$.
Las fórmulas $T^{\alpha\beta} = (\rho+p/c^2).U^\alpha U^\beta + p.\eta^{\alpha\beta}$ contienen efectos relativistas porque contemplan el γ de Lorentz.
Si queremos llegar a estas mismas fórmulas no podemos mantenernos en la Física Clásica. Debemos utilizar la adición relativista de velocidades, sustituyendo $u_x=(u'_x+v_o)/(1+u'_x.v_o/c^2)$ para hacer aparecer el u'_x del referencial de reposo y poder utilizar el hecho de que $\langle u'_x\rangle = 0$.
También debemos incorporar dentro de los promedios el factor γ de cada una de las partículas.
A bajas velocidades $\gamma^2 \approx 1+(u_x^2+u_y^2+u_z^2)/c^2 \approx (1+u_x^2/c^2)\ (1+u_y^2/c^2)\ (1+u_z^2/c^2)$
Es importante esta separación de variables, porque así nos quedan cantidades no correlacionadas y *el valor medio del producto resulta el producto de los valores medios*.

$\langle \gamma^2 u_x\rangle = \langle u_x.(1+u_x^2/c^2)\ (1+u_y^2/c^2)\ (1+u_z^2/c^2)\rangle = \langle u_x\ (1+u_x^2/c^2)\rangle (1+v_T^2/c^2)^2$
$\langle \gamma^2 u_x\rangle = \langle u_x + u_x^3/c^2)\rangle (1+v_T^2/c^2)^2$
$\langle \gamma^2 u_x\rangle = [\langle u_x\rangle + \langle u_x^3\rangle/c^2] \rangle (1+v_T^2/c^2)^2$

Primer paso: Calcular $\langle u_x\rangle = \langle (u'_x+v_o)/(1+u'_x.v_o/c^2)\rangle$
$\langle u_x\rangle \approx \langle (u'_x+v_o).(1-u'_x.v_o/c^2)\rangle = \langle u'_x+v_o-u'_x{}^2.v_o/c^2-u'_x.v_o^2/c^2)\rangle = v_o.\langle 1-u'_x{}^2/c^2\rangle$
$\langle u_x\rangle = v_o.[\ 1-v_T^2/c^2]$

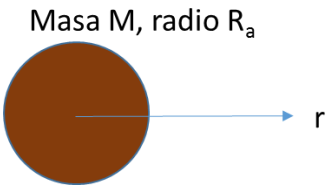
Segundo paso: Calcular $\langle u_x^3\rangle = \langle (u'_x+v_o)^3/(1+u'_x.v_o/c^2)\rangle = \langle (u'_x+v_o)^3.(1-u'_x.v_o/c^2)\rangle$
$\langle u_x^3\rangle = \langle (u'_x{}^3+3u'_x{}^2v_o+3u'_xv_o^2+v_o^3).(1-u'_x.v_o/c^2)^3\rangle$
$\langle u_x^3\rangle = \langle (u'_x{}^3+3u'_x{}^2v_o+3u'_xv_o^2+v_o^3).(1-3u'_x.v_o/c^2)\rangle$
$\langle u_x^3\rangle = \langle (u'_x{}^3+3u'_x{}^2v_o+3u'_xv_o^2+v_o^3-3u'_x{}^4.v_o/c^2-9u'_x{}^3.v_o^2/c^2-9u'_x{}^2.v_o^3/c^2-3u'_x.v_o^4/c^2\rangle$ →pot.impares
$\langle u_x^3\rangle = \langle (3u'_x{}^2v_o+v_o^3-3u'_x{}^4.v_o/c^2-9u'_x{}^2.v_o^3/c^2\rangle$
$\langle u_x^3\rangle = v_o\langle (3u'_x{}^2+v_o^2-3u'_x{}^4/c^2-9u'_x{}^2.v_o^2/c^2\rangle$ →mantenemos términos dominantes
$\langle u_x^3\rangle \approx v_o\langle 3u'_x{}^2+v_o^2\rangle$
$\langle u_x^3\rangle = v_o(3v_T^2+v_o^2)$

Sustituimos:
$\langle \gamma^2 u_x\rangle = [v_o.(\ 1-v_T^2/c^2) + v_o(3v_T^2+v_o^2)/c^2] \rangle (1+v_T^2/c^2)^2$
$\langle \gamma^2 u_x\rangle \approx v_o\ [\ 1-v_T^2/c^2 + 3v_T^2/c^2+v_o^2/c^2].(1+2v_T^2/c^2)$
$\langle \gamma^2 u_x\rangle \approx v_o\ [\ 1+v_o^2/c^2 + 4v_T^2/c^2]$
$\langle T^{0x}\rangle = \rho_o.c.\langle \gamma^2 u_x\rangle \approx v_o\ [\ 1+v_o^2/c^2 + 4v_T^2/c^2]$

Tercer paso: Comparar contra $\langle T^{00}\rangle = \rho_o.c^2\langle \gamma^2\rangle = \rho_o.c^2\langle 1+u_x^2/c^2\rangle.\langle 1+u_y^2/c^2\rangle.\langle 1+u_z^2/c^2\rangle$
$\langle T^{00}\rangle \approx \rho_o.c^2\langle 1+u_x^2/c^2\rangle(1+2v_T^2/c^2) = \rho_o.c^2.(1+\langle u_x^2\rangle/c^2)(1+2v_T^2/c^2)$
Ejercicio: Calcular $\langle u_x^2\rangle$
$\langle T^{00}\rangle \approx \rho_o.c^2.(1+[\ v_T^2+v_o^2]\ /c^2)(1+2v_T^2/c^2)$
$\langle T^{00}\rangle \approx \rho_o.c^2.(1+3v_T^2/c^2+v_o^2/c^2]$
Con el símbolo 'ρ_o' nos referíamos a la densidad de reposo de las moléculas, aquí se convierte en una densidad térmica $\rho_T = \rho_o.(1+3v_T^2/c^2)$.
$\langle T^{00}\rangle = \rho_T\ c^2\ .(1+v_o^2/c^2)$ → rojo = γ_o^2 de la transformación de Lorentz con velocidad macroscópica
$\langle T^{0x}\rangle = \rho_T\ cv_o(1+v_o^2/c^2)(1+\ v_T^2/c^2)$
$\langle T^{0x}\rangle = \rho_T\ cv_o(1+v_o^2/c^2)[1+\ p/(\rho c^2)]$
$\langle T^{0x}\rangle \approx\ [\ \rho_T + p/c^2]cv_o\gamma_o^2$

10.2.3 Materia compacta:

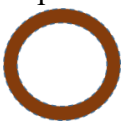
Otra configuración importante a analizar son los astros de materia compacta, por ejemplo planetas.



En el campo gravitatorio creado por el astro, las líneas geodésicas son las trayectorias de órbita o de caída libre. Esto vale incluso para el interior del planeta $r<R_a$.
Sin embargo, en la región $r<R_a$ se encuentran presentes las porciones de masa que forman parte del planeta y que normalmente están en reposo, es decir, *no siguen trayectorias geodésicas*.
Lo que significa que hay fuerzas que se oponen a la caída libre, fuerzas de contacto entre una porción de masa y sus porciones vecinas →fuerzas que se identifican con la PRESIÓN.
La presión sigue una ley de variación con la altura muy similar a la estudiada en la Física Clásica; la única diferencia es que la *altura* es en este contexto la coordenada radial referida al centro del planeta.

Aplicamos un balance de fuerzas a una porción de materia "dm".
Por un lado está el peso $-dm.\nabla\Phi_g$., siendo $dm=\rho_m.dVol$ y ρ_m = densidad.
Por otro lado están las fuerzas de presión, $-\nabla p.dVol$.
El equilibrio da $\rho_m.\nabla\Phi_g + \nabla p = 0$.
Aproximando la densidad como uniforme, esto se puede simplificar como $\rho_m.\Phi_g + p \approx cte$.

Si pensamos en la materia contenida entre 2 cáscaras esféricas de radio respectivo 'r' y 'r+dr',



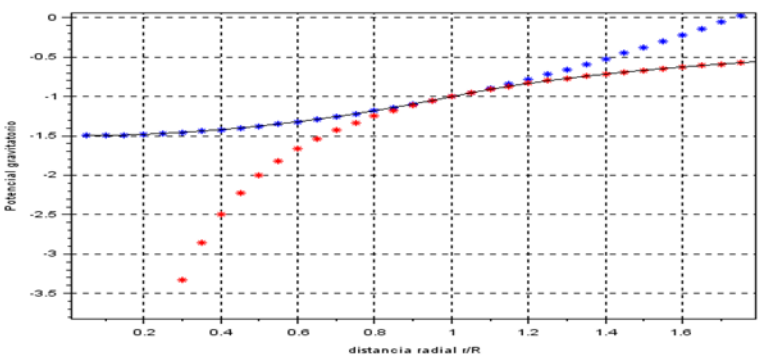
observamos que la presión interna p(r) debe ser superior a la presión externa p(r+dr) para compensar el peso (que es radial hacia el centro del planeta).

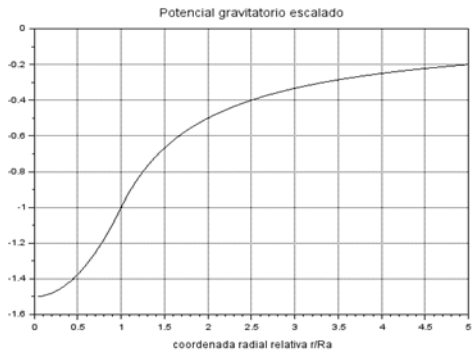
Para obtener el perfil de potencial Φ_g, resolvemos la ecuación de Poisson con fuentes $\nabla^2\Phi_g=4.\pi.G.\rho_m$.
La aproximación de densidad uniforme nos permite encontrar una solución particular de la forma
$\Phi_g=\Phi_o + k(x^2+y^2+z^2)= \Phi_o + k.r^2$.
$\nabla^2\Phi_g = \partial_x{}^2\Phi_g + \partial_y{}^2\Phi_g + \partial_z{}^2\Phi_g = 2k + 2k + 2k = 6k = 4.\pi.G.\rho_m$ $\quad\rightarrow k=2/3.\pi.G.\rho_m$

Hacemos aparecer la masa total del planeta $M=\rho_m.Vol = \rho_m.4/3.\pi.R_a^3$ y sustituimos en 'k' para obtener la equivalencia $k= MG/(2R_a^3)$.
$\Phi_g(r) = \Phi_o + M.G.r^2/(2R_a^3)$

La constante Φ_o se ajusta para que en la frontera $r=R_a$ valga $\Phi_g(r)= -M.G/R_a$ = potencial de Newton

- $\Phi_g(r) = M.G/R_a.(-3/2 + 1/2\ .r^2/R_a^2)$ $\quad r\leq R_a$, donde hay materia
- $\Phi_g(r) = -M.G/r$ $\quad r\geq R_a$, donde hay vacío





La gráfica muestra los potenciales gravitatorios en cada región:

- curva de asteriscos rojos, válida para $r>R_a$ (exterior del planeta)
- curva de asteriscos azules, válida para $r<R_a$ (interior del planeta)
- curva negra: unión de ambas regiones

El perfil de presión se deduce del potencial a partir de las siguientes condiciones:

$\rho_m.\Phi_g(r) + p(r) = \text{constante}$

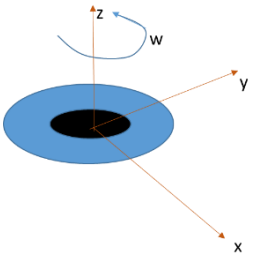
$p(R_a) = 0$ se asume que el planeta está en el espacio exterior, vacío

La presión máxima ocurre en el interior del planeta y vale $p(0)=\rho_m.[\Phi_g(R_a) - \Phi_g(0)]$

$p_{max} = \frac{1}{2}.\ \rho_m.\ MG/R_a$

10.2.4 Derivada covariante:

En algunas configuraciones particulares, en especial cuando un sólido está sometido únicamente a tensiones normales (no rasantes) también es aplicable la fórmula del fluido $T^\alpha{}_\beta = (\rho_o+p/c^2).U^\alpha U_\beta + p.g^\alpha{}_\beta$.



Pensemos en una estación espacial rotatoria como las que ya analizamos en otras ocasiones (por ejemplo el *Toro de Stanford*, presentado en 6.6.4).

Definimos coordenadas cilíndricas con eje de giro $\hat{z}$, de manera que cada partícula rota alrededor de ese eje $\hat{z}$ con una cuadrivelocidad $U^\alpha=(c.\dot{t},\dot{r},\dot{\varphi},\dot{z}) = (c.\dot{t},0,\dot{\varphi},0)$.

La métrica es $g_{\alpha\beta}=\text{diag}(-1,1,r^2,1)$, y la métrica dual es $g^{\alpha\beta}=\text{diag}(-1,1,1/r^2,1)$.

La cuadrivelocidad covariante es $U_\beta=(-c.\dot{t},0, r^2\dot{\varphi},0)$.

Ejercicio: Calcular los símbolos de Christoffel para esta métrica y demostrar que los únicos no nulos son $\Gamma^r{}_{\varphi\varphi}=-r$, $\Gamma^\varphi{}_{r\varphi}= \Gamma^\varphi{}_{\varphi r} =1/r$.

El Lagrangeano para cada porción de masa m_o de la estación tiene la forma:

$\mathcal{L}(ct,r,\varphi,z,c\dot{t},\dot{r},\dot{\varphi},\dot{z},\tau) = -m_o.c^2.\sqrt{\dot{t}^2 - \dot{r}^2/c^2 - r^2.\dot{\varphi}^2/c^2 - \dot{z}^2/c^2}$ $\qquad \sqrt{\ }=1$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange para la coordenada radial son:

$P_r=\partial\mathcal{L}/\partial\dot{r}$

$dP_r/d\tau - \partial_r\mathcal{L} = F_r$

$m_o.\ddot{r} - m_o.r.\dot{\varphi}^2 = F_r$

$\ddot{r}=0$ porque las masas de la estructura están girando a radio constante. ¿Entonces quién les suministra la fuerza centrípeta necesaria para describir el giro circular? La F_r de la ecuación de Euler-Lagrange, que se origina en las tensiones internas al material (en este caso alcanza con un gradiente radial de presión).

Este mismo balance de fuerzas debería surgir de aplicar la divergencia al tensor de energía-impulso, utilizando las fórmulas de derivada covariante.

Llamamos $M^\alpha{}_\beta = (\rho_o+p/c^2).U^\alpha U_\beta$, con solamente 4 casilleros no nulos, y escribimos $T^\alpha{}_\beta = M^\alpha{}_\beta + p.g^\alpha{}_\beta$

De acuerdo con las fórmulas 8.4.6:

$\nabla_\alpha T^\alpha{}_\beta = \partial_\alpha M^\alpha{}_\beta + \Gamma^\alpha{}_{\alpha\sigma}.M^\sigma{}_\beta - M^\alpha{}_\sigma.\Gamma^\sigma{}_{\alpha\beta} + \nabla_\alpha p.g^\alpha{}_\beta$

$\nabla_\alpha T^\alpha{}_\beta = (1) \quad + (2) \quad -(3) \quad +(4)$

Nos concentramos en el balance radial $\beta=r$, que sospechamos es el más significativo, y calculamos por orden cada una de las 4 contribuciones.

(1) = $\partial_\alpha M^\alpha{}_r$ →Los $M^\alpha{}_r$ son todos nulos
(1) = 0

(2) = $\Gamma^\alpha{}_{\alpha\sigma}.M^\sigma{}_r$ →Los $M^\sigma{}_r$ son todos nulos
(2) = 0

$-(3) = -M^\alpha{}_\sigma.\Gamma^\sigma{}_{\alpha r}$ →expandimos la suma en los 4 casilleros no nulos
$-(3) = -M^0{}_0.\Gamma^0{}_{0r} - M^0{}_\varphi.\Gamma^\varphi{}_{0r} - M^\varphi{}_0.\Gamma^0{}_{\varphi r} - M^\varphi{}_\varphi.\Gamma^\varphi{}_{\varphi r}$ →sustituimos los Christoffel, hay solo uno no trivial
$-(3) = (\rho c^2+p).0 - M^0{}_\varphi.0 - M^\varphi{}_0.0 - (\rho+p/c^2)r^2\dot{\varphi}^2.(1/r)$
$-(3) = -(\rho+p/c^2)r\dot{\varphi}^2$

(4) = $\nabla_\alpha p.g^\alpha{}_r$ → $g^\alpha{}_r = \delta^\alpha{}_r$
(4) = $\nabla_r p$
(4) = $\partial_r p$

Al juntar las 4 contribuciones queda: $\partial_r p = (\rho+p/c^2)r\dot{\varphi}^2$
Si lo miramos desde el punto de vista de la estación, donde hay gravedad simulada por rotación, esta ecuación está diciendo que la presión aumenta en las coordenadas radiales altas. Que, en el referencial de la estación, están más "*abajo*" y deben soportar el peso de las restantes partes de la estructura que están más "*arriba*". Tiene sentido.
Aunque sea un efecto insignificante a bajas velocidades y presiones $p \ll \rho.c^2$, observar de cualquier manera cómo la presión se mezcla con la densidad para dar una masa efectiva incrementada: materia presurizada tiene más inercia, es más difícil de acelerar (y también más sensible al campo gravitatorio, real o simulado).
Curiosidad: Si aplicamos a una porción de volumen este balance de fuerza y multiplicamos por ΔVol, nos queda la ecuación geodésica. La equivalencia es $\Delta Vol.\partial_r p = F_r$, $\Delta Vol.(\rho+p/c^2) = m_o$.

Ejercicio: Realizar el balance temporal $\beta=0$ y verificar la conservación de los flujos de masa.

Ejercicio: Repetir los cálculos para la nave de Rindler con aceleración lineal.
Los Christoffel deben dar $\Gamma^X{}_{00} = -X/X_H{}^2$, $\Gamma^0{}_{X0} = \Gamma^0{}_{0X} = 1/X$.
El balance de fuerzas/presiones al que hay que llegar es $\partial_X p = -(\rho c^2+p)/X$
Aquí la presión aumenta con las coordenadas 'X' de menor valor, que son las que están "*abajo*".
Observar que puede escribirse $1/X.\partial_X(X.p) = 1/\sqrt{-g}.\partial_X(\sqrt{-g}.p)$, expresión típica de muchas divergencias covariantes en coordenadas curvilíneas.

Invitación a reflexionar: El aumento de la inercia $\rho+p/c^2$ para un líquido presurizado puede correlacionarse con la agitación térmica: energía cinética de traslación, rotación y vibración. ¿Cómo se puede interpretarse para un sólido presurizado? Podría estar relacionado con la energía elástica, si el sólido se modelara como centros de masa unidos por resortes (como el colchón del capítulo 7.4). Toda forma de energía contribuye a la masa efectiva en armonía con $E=mc^2$.
Una porción 'm_s' de materia sólida que ocupa un volumen ΔVol está sometida una fuerza $-\Delta Vol.\nabla p$.
Es una fuerza que deriva de un potencial $U_{pot} = p.\Delta Vol$.
De acuerdo con las secciones 5.3.5 y 6.5.4, $m_{eff} = m_s + U_{pot}/c^2$ debería ser la masa efectiva que aparece en la cantidad de movimiento multiplicando a la velocidad propia.

$$m_{eff} = m_s + p.\Delta Vol/c^2 = \Delta Vol\,(m_s/\Delta Vol + p/c^2) = \Delta Vol\,(\rho + p/c^2)$$

En los análisis lagrangeanos correspondientes a una porción de materia, los momentos dan $p_x = m_o.\dot{x}$.
La identificación de m_o con $m_{eff} = \Delta Vol\,(\rho + p/c^2)$ da cuenta de este efecto relativista.
Cuando el sólido presurizado se mueve, como es el caso de la estación espacial rotatoria, debe utilizarse esa corrección de masa efectiva.

10.3 Campos electromagnéticos.

Los campos electromagnéticos transmiten energía y momento a través de su vector de Poynting $\vec{S}$, por lo que es de esperar que también aporten su contribución al tensor de energía-impulso.
En las secciones 10.1 a 10.2 comenzamos considerando solo la masa y definimos $T^{00}=c^2.\rho_m$.
Pero la masa es solamente una forma de energía, es un caso particular de la relación de Einstein $E=m.c^2$.
La definición más general del componente T^{00} es "densidad de energía por unidad de volumen" y debería contemplar otras energías aparte de las masas.

Comenzamos presentando el resultado final y luego justificamos cada casillero del tensor.

$Tem^{\alpha\beta}$	ct	x	y	z
ct	u_{em}	Sx/c	Sy/c	Sz/c
x	Sx/c	-σxx	-σxy	-σxz
y	Sy/c	-σyx	-σyy	-σyz
z	Sz/c	-σzx	-σzy	-σzz

- $u_{em}= ½.[\epsilon_0.E^2 + B^2/\mu_0]$ es la densidad volumétrica de energía electromagnética
- $\vec{S} = (Sx,Sy,Sz) = \vec{E} \wedge \vec{H}$ = vector de Poynting
- [σij] es el tensor de tensiones de Maxwell (en inglés "*Maxwell stress tensor*")

En ausencia de materia, la divergencia de la primera columna del tensor Tem es:
$\partial_{ct}u_{em} + \nabla\cdot(\vec{S}/c) = 1/c. (\nabla\cdot\vec{S} + \partial_t u_{em}) = 0$
Que se anule esta expresión es resultado de la conservación de la energía electromagnética (Teorema de Poynting), al no haber materia no aparece el término de disipación por efecto Joule $-\vec{J}\cdot\vec{E}$.

En presencia de materia, el tensor energía-impulso tiene dos aportes: mecánico + electromagnético.
$T^{\alpha\beta}(total) = T^{\alpha\beta}(mec) + T^{\alpha\beta}(e.m.)$

$T^{\alpha\beta}$	ct	x	y	z
ct	$u_{em} + \rho_m.c^2$	$S_x/c + c.j_{mx}$	$S_y/c + c.j_{my}$	$S_z/c + c.j_{mz}$
x	$S_x/c + c.j_{mx}$	-σxx + p	-σxy	-σxz
y	$S_y/c + c.j_{my}$	-σyx	-σyy + p	-σyz
z	$S_z/c + c.j_{mz}$	-σzx	-σzy	-σzz +p

Energía:
$\nabla\cdot\vec{S} + \partial_t u_{em} = -\vec{J}\cdot\vec{E}$ $\qquad\qquad$ $\nabla\cdot\vec{j_m} + \partial_t\rho_m = +\vec{J}\cdot\vec{E}/c^2$
El balance electromagnético tiene "*pérdidas*" Joule, que aparecen en el balance mecánico como un término de "*generación*". Cuando un material se está calentando por la circulación de corriente eléctrica, el aumento de energía térmica pasa a formar parte del ρ_m por la equivalencia masa=energía. El balance total da nulo.

Momento:
La cantidad de movimiento que se conserva es la total, lo cual se expresa por la divergencia de las columnas espaciales del tensor: $\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$ para β=i=1,2,3
Por simplicidad ignoramos esfuerzos cortantes en la materia y consideramos solo presiones 'p'.
También por simplicidad suponemos gravedades débiles y aproximamos la derivada covariante ∇_α por la derivada coordenada ∂_α, (con la precaución de que habrá que agregar los "pesos" clásicos $-\rho_m\nabla\Phi_g$ si es necesario hacer un cálculo más detallado).

Las ecuaciones quedan de la forma clásica "fuerza = masa x aceleración":

$$1/c.\partial_t[\vec{S}/c + c.\vec{j_m}] - \nabla\cdot[\sigma] + \nabla p = 0$$
$$1/c^2.\partial_t\vec{S} + \partial_t\vec{j_m} - \nabla\cdot[\sigma] + \nabla p = 0$$
$$\partial_t\vec{j_m} = \nabla\cdot[\sigma] - 1/c^2.\partial_t\vec{S} - \nabla p$$

El lado izquierdo da la aceleración de los flujos de materia.
El lado derecho tiene las fuerzas en sus 2 aportes:

- fuerzas electromagnéticas
- fuerzas mecánicas por gradiente de presión (y eventualmente "peso gravitatorio")

10.3.1 Tensor de tensiones de Maxwell:

Recordamos que la fuerza electromagnética de Lorentz puede escribirse como divergencia del tensor de tensiones de Maxwell. En esta sección planteamos solo las líneas generales de la demostración, para ver más detalles se sugiere consultar textos sobre Electromagnetismo clásico.

Fuerza sobre una carga 'q' $\quad \vec{F} = q.\vec{E} + q.\vec{u} \wedge \vec{B}$

Fuerza por unidad de volumen $\quad \vec{f_{vol}} = \rho.\vec{E} + \vec{J} \wedge \vec{B}$

Sustituimos por Maxwell $\rho = \epsilon_o.\nabla \cdot \vec{E}$ $\quad \vec{J} = (\nabla \wedge \vec{B})/\mu_o - \epsilon_o.\partial_t\vec{E}$

$\vec{f_{vol}} = \epsilon_o.\nabla \cdot \vec{E}.\vec{E} + [(\nabla \wedge \vec{B})/\mu_o - \epsilon_o.\partial_t\vec{E}] \wedge \vec{B}$

Aislamos cada componente x, y, z de la fuerza, en su parte magnética y en su parte eléctrica, y operamos hasta hacer aparecer la divergencia del tensor de tensiones

$$[\sigma_{MAXWELL}] = \epsilon_o.\{\vec{E} \otimes \vec{E} - \tfrac{1}{2}.E^2.[I]\} + 1/\mu_o.\{\vec{B} \otimes \vec{B} - \tfrac{1}{2}.B^2.[I]\}$$

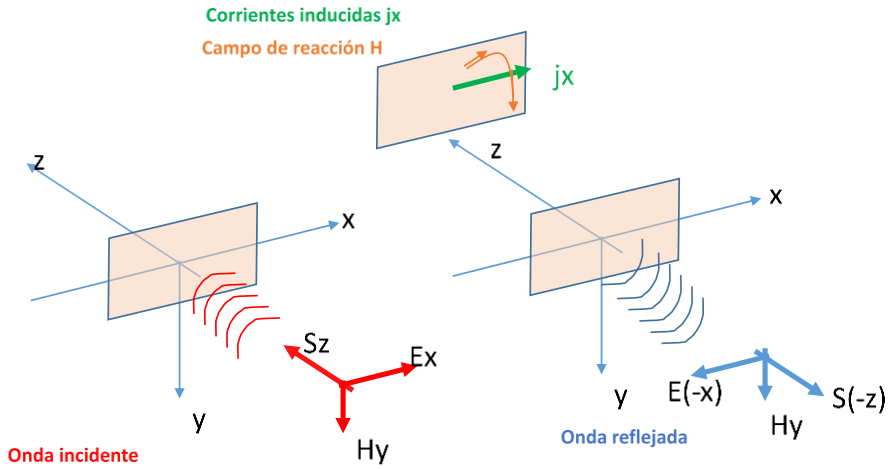
$$\sigma[i,j] = \epsilon_o.\{E[i]E[j] - \tfrac{1}{2}.E^2.\delta Kron[i,j]\} + 1/\mu_o.\{B[i]B[j] - \tfrac{1}{2}.B^2.\delta Kron[i,j]\}$$

Los sumandos que quedan fuera de la divergencia del tensor (3D) involucran al vector de Poynting $\vec{E} \wedge \vec{H}$ y sus derivadas temporales →*veremos que pasan a formar parte de una divergencia 4D.*

10.3.2 Energía y momento del campo electromagnético:

En la columna-0 del tensor aparecen las componentes del vector de Poynting, identificadas como flujo de energía por unidad de área y de tiempo, y asociadas a la ley de conservación $(\nabla \cdot \vec{S} + \partial_t u_{em}) = 0$.
Por la simetría del tensor, esas mismas componentes aparecen también en la fila-0 del tensor, en los casilleros correspondientes a la densidad volumétrica de cantidad de movimiento. Mostramos en esta sección porqué tiene sentido identificar al vector de Poynting con la cantidad de movimiento.

En la figura se muestra una onda electromagnética que incide en forma normal sobre un plano conductor ubicado con coordenada z=0 (plano xy).



- En el semi-espacio z<0 hay aire, aproximado como vacío con $\epsilon \approx \epsilon_o$ y $\mu \approx \mu_o$
- En el semi-espacio z>0 hay un conductor ideal que repele todos los campos
- El campo Ex induce corrientes según $\hat{x}$ que crean un campo magnético de reacción; este circula alrededor de los tubos de corriente y da como resultado que se cancela el incidente Hi del lado del metal y se lo refuerza del lado del aire.
- El campo de reacción también tiene una componente eléctrica que da como resultado un $\vec{E}$ reflejado con igual magnitud pero sentido opuesto al $\vec{E}$ incidente, para cumplir con las condiciones de borde del metal.
- Los tubos de corriente superficial inducida experimentan una fuerza de Lorentz $\vec{J} \wedge \vec{B}$, que de acuerdo a los ejes y sentidos del dibujo es según $\hat{z}$: La onda "empuja" al conductor en el sentido de su vector de Poynting.

- Por efecto de acción/reacción, el metal conductor también "empuja" a la onda y le cambia su trayectoria. La onda incidente trae cantidad de movimiento proporcional a $\vec{Si}$, según el eje $\hat{z}$, y al ser reflejada pasa a ser $\vec{Sr}$ según $-\hat{z}$.
- Omitimos los cálculos detallados y enunciamos el resultado: la energía involucrada en la interacción es dx.dy.Ex.Hy.dt, y el impulso (fuerza.dt) es 2.Ex.Hy.dx.dy.dt/c (el factor 2 se debe al cambio de dirección durante la reflexión).
- Si restringimos los tamaños de los diferenciales hasta que participe un único "fotón" en la interacción, tendríamos que dicho fotón lleva una energía E y una cantidad de movimiento p=E/c. (En consonancia con la sección 5.3.3 de Relatividad Especial).
- Este resultado también está en consonancia con las fórmulas de la Mecánica Cuántica $E=\hbar.\omega$ y $p=\hbar.k$. Habría una correspondencia entre la constante de Plank $\hbar$, el diferencial de tiempo dt y el diferencial de área dx.dy para que impacte un único fotón durante el análisis.

Ejercicio: Realizar los cálculos para incidencia oblicua con ángulo θ. Deben distinguirse 2 tipos de polarización del vector $\vec{E}$ en relación al plano de incidencia de la onda:

- En un caso las corrientes inducidas se debilitan y la fuerza total queda afectada por un factor $\cos^2(\theta)$
- En el otro caso las corrientes inducidas conservan su valor de incidencia normal, pero se induce carga superficial que da como resultado una fuerza eléctrica proporcional a $\text{sen}^2(\theta)$ que se opone a la magnética, dando el mismo factor de debilitamiento $1-\text{sen}^2(\theta)=\cos^2(\theta)$.

Ejercicio: Realizar un análisis semi-clásico de la incidencia oblicua, suponiendo partículas fotónicas que chocan elásticamente contra el reflector y experimentan solo fuerza transversal (conservan su cantidad de movimiento longitudinal al plano).

10.3.3 Expresión tensorial del $T^{\alpha\beta}$ electromagnético:

Si observamos los términos del tensor de energía-impulso comprobamos que todos son de segundo orden en las componentes de los campos $\vec{B}$ y $\vec{E}$: factores E_i^2, B_i^2, productos $E_i.E_j$, $B_i.B_j$, productos E_i con B_j (Poynting)…etc

Es inmediato adivinar que el producto matricial $Y^\alpha{}_\beta = F^{\alpha\lambda}.F_{\lambda\beta}$ debe formar parte de una formulación tensorial "bien-variante". Para obtener una forma totalmente contravariante $Y^{\alpha\beta}$ o totalmente covariante $Y_{\alpha\beta}$ será necesario realizar productos por el tensor métrico.

Finalmente se comprueba que la contracción $Y^\alpha{}_\alpha$ (la traza) también forma parte de la expresión buscada; está relacionada con el invariante electromagnético introducido en la sección 5.6.5.

La fuerza Lorentz por unidad de volumen es $L_\alpha=F_{\alpha\beta}.J^\beta$, y las ecuaciones de Maxwell dicen que $-\mu_0.J^\beta=\partial_\sigma F^{\sigma\beta}$. Operando se hace aparecer la derivada del producto $\partial_\sigma[F^{\sigma\beta}.F_{\alpha\beta}]$, y si se continúan los cálculos se llega finalmente a la divergencia exacta de un tensor.

Ejercicio:

Considerando espacio-tiempo plano en una primera aproximación, demostrar que el tensor presentado en 10.3 se corresponde con la expresión: $-T^{\alpha\beta}{}_{(e.m)} = 1/\mu_o.[F^{\alpha\sigma}.F_\sigma{}^\beta - (1/4).\eta^{\alpha\beta}.F_{\sigma\lambda}.F^{\lambda\sigma}]$

Sugerencia: Realizar los productos matriciales por zonas o bloques.

Observación-1: Otra vez el recurso de sumar y/o restar términos en la diagonal $Y^{\alpha\beta} - Y/4.\eta^{\alpha\beta}$, igual que en el caso del fluido perfecto ($Y=Y^\alpha{}_\alpha$).

Observación-2: En espaciotiempo curvo, vale lo mismo con $g^{\alpha\beta}$ en lugar de $\eta^{\alpha\beta}$.

Ejercicio: En una región limitada del espacio circula una onda electromagnética plana con $\vec{E}=E_y.\hat{y}$, $\vec{B}=B_z.\hat{z}$, $\vec{S}= E_yB_z/\mu_o\hat{x}$ y $E_y=cB_z$. Calcular el tensor de tensiones de Maxwell y el tensor de energía-impulso.

Demostrar que el tensor de energía-impulso tiene solo 4 casilleros no nulos, iguales todos: T^{00},T^{0x},T^{x0},T^{xx}.

Ver que se puede interpretar como el asociado a un "chorro" de proyectiles fotónicos con densidad 'ρ_o' y cuadrivelocidad $U^\alpha=(c\dot{t},u_x\dot{t},0,0)$ en el límite $\rho_o\to 0$, $u_x\to c$ y $\dot{t}\to\infty$.

10.3.4 Gas de fotones:

Analizamos un volumen con una cantidad grande de fotones moviéndose en todas las direcciones, en un estado estacionario en el que no se destaca ninguna dirección ni sentido privilegiado.
Como primera aproximación suponemos que la cantidad de fotones es 'N', y N/3 se mueven según cada dirección coordenada. Dentro de los que se mueven a lo largo de un cierto eje, por ejemplo $\hat{x}$, N/6 van hacia la derecha → y N/6 van hacia la izquierda ←. Para los otros ejes: N/6 adelante, N/6 atrás, N/6 arriba, N/6 abajo. De acuerdo con el ejercicio recién planteado, la contribución de los fotones +x es:
$T_{\alpha\beta}(x+)= N/6.B^2/\mu_o$.

```
[1 1 0 0]
[1 1 0 0]
[0 0 0 0]
[0 0 0 0]
```

Los fotones con dirección -x aportan lo mismo, salvo un signo cambiado en los casilleros Poynting 01 y 10.
$T_{\alpha\beta}(x-)= N/6.B^2/\mu_o$.

```
[1 -1 0 0]
[-1 1 0 0]
[0  0 0 0]
[0  0 0 0]
```

La combinación de ambos conjuntos de fotones refuerza la diagonal y cancela los casilleros fuera de la diagonal (tiene lógica, ya que no hay flujo neto en ninguno de los dos sentidos).
$T_{\alpha\beta}(x)= N/6.B^2/\mu_o$.

```
[2 0 0 0]
[0 2 0 0]
[0 0 0 0]
[0 0 0 0]
```

Los aportes de las otras direcciones coordenadas son:
$T_{\alpha\beta}(y)= N/6.B^2/\mu_o$.

```
[2 0 0 0]
[0 0 0 0]
[0 0 2 0]
[0 0 0 0]
```

$T_{\alpha\beta}(z)= N/6.B^2/\mu_o$.

```
[2 0 0 0]
[0 0 0 0]
[0 0 0 0]
[0 0 0 2]
```

Suponemos que todos los fotones llevan la misma energía dada por iguales campos E,B.
El tensor global, resultante de sumar los aportes de los 3 ejes, queda:
$T_{\alpha\beta}(xyz)= N/6.B^2/\mu_o$.

```
[6 0 0 0]
[0 2 0 0]
[0 0 2 0]
[0 0 0 2]
```

En un gas isotrópico también es de esperar que haya población de fotones en otras ternas de ejes rotados x',y',z'. Nos situamos en un referencial solidario Σ', calculamos el aporte (diagonal), y luego volvemos al referencial Σ aplicando los jacobianos de rotación, que no alteran el tensor diagonal.
Repetimos el procedimiento para todas las ternas de direcciones posibles, y sumamos los aportes.
El resultado es un tensor de energía impulso con igual forma que un fluido perfecto diag(ρc^2,p,p,p).
La particularidad de este caso electromagnético es que el casillero temporal es el triple de los espaciales.
Lo que corresponde a un fluido (llamado gas de fotones) con ecuación de estado $\rho=3p/c^2$.
Este resultado se utiliza en Cosmología.

10.3.5 Traza del tensor de energía impulso:

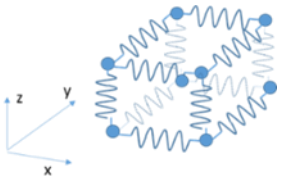
La traza se define como la contracción del tensor con la métrica $T=T^{\alpha}{}_{\alpha}= T^{\alpha}{}_{\beta}.g_{\beta}{}^{\alpha}$.
Cuando el tensor está en su forma mixta, la traza resulta ser la suma de los elementos de la diagonal.
Su valor varía en las distintas configuraciones de materia-energía:

Polvo 10.2.1: $T=-\rho c^2 + \rho(u_x^2+u_y^2+u_z^2)$
Fluido 10.2.2: $T=-\rho c^2 + 3p$
Sólido 10.2.3: $T=-\rho c^2 + 3p$
Gas de fotones 10.3.4: $T=0$!
(*Esta última propiedad T=0 es común a cualquier configuración electromagnética, no solo fotones*).

A pesar de la diversidad de casos, parece haber algo en común: el signo de la traza.
En el caso del polvo, la traza es negativa porque la velocidad verifica $u^2<c^2$.
Los fotones viajan con u=c, y el tensor de un gas formado por fotones tiene traza nula. Podrían verse como el límite en que el polvo se mueve a u→c y adquiere "*propiedades fotónicas*".
Para tener una traza positiva las partículas de polvo tendrían que moverse a velocidades mayores que la luz, eso les otorgaría "*propiedades taquiónicas*" que no contemplamos en este trabajo.

En el caso de un fluido, si se trata de un gas ideal es sencillo visualizar el límite de traza nula.
En 10.2 veíamos $p=\rho.v_T^2$, donde v_T es la velocidad térmica, la media cuadrática de la velocidad en cada eje coordenado $<u_x^2>,<u_y^2>,<u_z^2>$. La restricción de traza negativa está asociada al hecho de que las moléculas no pueden viajar más rápido que la luz.

Nos preguntamos: ¿los sólidos tendrán también esta restricción?
Podemos modelarlos como centros de masa m_o unidos por enlaces elásticos, como en la sección 7.4.



Un resorte de longitud natural l_o, al ser comprimido, adquiere longitud $\ell=l_o-\Delta\ell$.
$\Delta\ell=F/k_o$, siendo k_o=constante elástica, F=fuerza.
Esta fuerza es la resultante de una presión 'p' actuando sobre un área l_o^2.
$\Delta\ell=p.l_o^2/k_o$
La máxima compresión se alcanza cuando $\Delta\ell=l_o$. Más allá de ese punto no se puede pasar, los centros de masa ya se pegarían todos con todos y no se podrían encimar más.
Entonces $p_{max}=k_o\ \Delta\ell_{max}/l_o^2=kl_o/l_o^2$

$p_{max}=k_o l_o^2\ /l_o^3$ →hacemos aparecer la densidad $\rho=m_o/l_o^3$
$p_{max}=\rho.k_o l_o^2/m_o$

En el modelo del colchón de resortes, 7.4.3, calculábamos la velocidad de propagación de las perturbaciones como $v_p^2 = (k_o.l_o^2)/m_o$. Es exactamente la cantidad que nos aparece en el límite de presión máxima admisible, así que sustituimos:
$p_{max}=\rho.v_p^2$
Las perturbaciones no pueden viajar más rápido que la luz $v_p^2<c^2$, lo que implica $p<\rho.c^2$.
He aquí otra configuración de materia-energía donde la traza del tensor está limitada a no poder alcanzar el límite T=0, debe mantenerse negativa.

10.4 Perturbaciones métricas.

Al inicio de este capítulo 10 proponíamos la siguiente ecuación tensorial: $[]^2\, h^{\alpha\beta} \approx -8.\pi.G/c^4.T^{\alpha\beta}$
Esta ecuación es consistente con el estado de avance que teníamos en la sección Gravitoelectromagnetismo del capítulo 7.1 cuando solo conocíamos ejemplos de métricas con perturbación temporal. En las siguientes secciones iremos demostrando que esta ecuación es imperfecta, pero no la abandonaremos completamente. Valoramos su principal utilidad, que fue ayudarnos a identificar el protagonismo del tensor de energía-impulso. Y encontraremos los cambios (no excesivos) que son necesarios para llegar a un resultado más correcto.

Repasamos ahora las perturbaciones métricas que esperamos ver asociadas al tensor de energía-impulso para las distintas configuraciones de materia analizadas.
Novedad: Como consecuencia de pasar de vectores a tensores, estamos introduciéndonos en una teoría gravitatoria bastante más rica (y también más complicada) que la clásica de Newton: *los flujos másicos y las tensiones también son fuente de gravedad y de distorsión del espaciotiempo*.

10.4.1 Presiones:

La presencia de una presión 'p' en la diagonal de $T^{\alpha\beta}$ sugiere introducir en la métrica espacial un nuevo potencial gravitatorio Ψ_g que no se puede modelar por la analogía Gravitación-Electromagnetismo.

$h^{\alpha\beta} = -2/c^2.$

$$\begin{bmatrix} \Phi_g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Psi_g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Psi_g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Psi_g \end{bmatrix} \qquad T^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} c^2.\rho_m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones tentativas que relacionan las magnitudes son $[]^2\Phi_g = 4\pi G.\rho_m$ $\qquad []^2\Psi_g = 4\pi G.p/c^2$
En principio podríamos pensar que $|\Psi_g| \ll |\Phi_g|$ debido a que sus fuentes supuestas verifican $p \ll c^2.\rho_m$
Sin embargo, esta relación solo se cumple en determinadas configuraciones.
En el caso del planeta estudiado en la sección 10.2.3, la presión máxima en el interior vale:

$p_{max} = \rho_m.MG/(2R_a)$
$p_{max}/(\rho_m.c^2) = MG/(2R_a)/c^2$
$p_{max}/(\rho_m.c^2) = \mathbf{2MG/c^2}/(4R_a)$ →Reconocemos el radio de Schwarzschild $r_S = 2.M.G/c^2$.
$p_{max}/(\rho_m.c^2) = \mathbf{r_S}/(4R_a)$

Si la masa del astro 'M' aumenta gradualmente y el radio 'R_a' disminuye, llega un momento en que 'R_a' alcanza el orden de magnitud del radio de Schwarzschild. En la sección 6.7 habíamos analizado al astro masivo "*por fuera*" → veíamos que en estas condiciones la dilatación temporal se intensifica enormemente cuando nos acercamos, se forma un agujero negro si se cumple $R_a < r_S$.
Ahora analizamos la gravedad "*por dentro*" del astro masivo y nos encontramos con otro efecto: la presión pasa a ser comparable a la densidad de masa (salvo factor c^2), lo que llevaría a esperar que hubiera una perturbación métrica espacial del mismo orden de magnitud que la perturbación temporal.
Todavía no llega a ser $\Psi_g \approx \Phi_g$, porque en el caso $r_S = R_a$ la presión máxima sería $\rho.c^2/4$ y la media en todo el volumen sería del orden de $\rho.c^2/8$, y eso repercutiría en potenciales externos $\Psi_g \approx \Phi_g/8$.
Incluso podríamos pensar en algo más extremo: si la materia se compacta mucho más allá del umbral de Schwarzschild, tendríamos $R_a \ll r_S$, $p_{max} \gg \rho_m.c^2$ y consecuentemente $|\Psi_g| \gg |\Phi_g|$.

Sin embargo, el hecho de que la presurización se manifieste en forma externa con potenciales Ψ,Φ muy diferentes nos enfrenta a un dilema: en el Electromagnetismo, cuando miramos "*desde afuera*" $r > R_a$ una distribución de carga esféricamente simétrica, solo percibimos en sus campos eléctricos y potenciales los efectos atribuibles a su carga total 'Q'. Nada depende del tamaño R_a ni la densidad ρ; no podemos obtener información que nos permita distinguir si se trata de una carga volumétrica homogénea 'ρ', una cáscara con carga superficial 'σ' o una carga puntual 'q'. Hay un "*ocultamiento*" de los detalles internos.
Esta misma idea se presenta en la Gravitación clásica de Newton debido a que el potencial Φ_g solo depende de la masa total 'M', no del tamaño R_a ni de la densidad ρ_m.

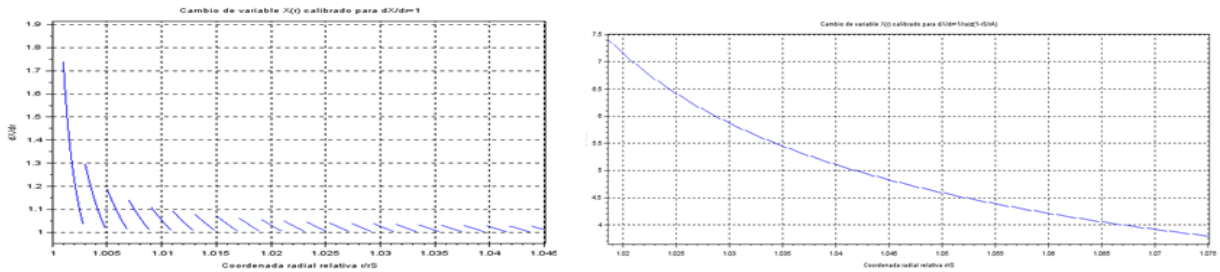
En esta teoría relativista que estamos construyendo y que todavía está incompleta, el potencial espacial Ψ_g sí parece depender de la densidad porque el nivel de presurización de la materia aumenta con la densidad. Si nos aferramos a la sospecha de que la hipótesis clásica del "*ocultamiento*" debe extenderse hacia la Relatividad, entonces la métrica producida por una distribución de materia colapsada también debe aplicarse a cualquier distribución de materia, porque si no fuera así entonces podríamos detectar el grado de presurización por medio de *medidas métricas* remotas.

Aclaración: Lógicamente, si realizamos *medidas ópticas* podemos bien distinguir los escenarios, porque un astro "normal" irradia luz propia o devuelve la luz incidente, mientras que una distribución colapsada (agujero negro) traga toda la luz incidente y no irradia luz propia. Nos estamos refiriendo a la sospecha de que la *distorsión métrica* de ambas distribuciones no debería permitir distinguirlas.

Los razonamientos del capítulo 7 siembran la idea de que para una distribución de materia colapsada la situación más probable no es $|\Psi_g| \ll |\Phi_g|$ ni $|\Psi_g| \gg |\Phi_g|$ sino más bien $\Psi_g \approx \Phi_g$.

En la sección 7.2.3, analizábamos la aproximación por tramos de la función $\sqrt{\beta(r)} = dX/dr$ del cambio de variables para pasar a coordenadas Rindler locales.

Comparábamos la alternativa $dX/dr=1$ frente a la hipótesis $dX/dr=1/\sqrt{1-r_S/r}$

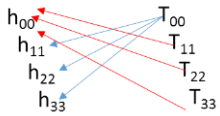


La segunda alternativa se comportaba en forma más suave en las proximidades del horizonte de sucesos, si es que seguía habiendo vacío al acercarnos tanto al astro.

Estas funciones $\alpha(r)$ y $\beta(r)$ son compatibles con una **modificación de la ecuación de campo**, si pensamos que ambos potenciales dependen tanto de la densidad como de la presión. La masa 'M' que define $r_S=2MG/c^2$ y que aparece en los factores $1-r_S/r$, debería ser una suma $M=M_o+\Delta M_{extra}$.

- M_o = masa propia, resultado de integrar ρ_o en todo el volumen del astro masivo.
- ΔM_{extra} = incremento relativista que surge de integrar las contribuciones de la presión.

Esto sacude el modelo tentativo en que solo T_{oo}(masa) es fuente de h_{oo} y solo T_{rr}(presión) es fuente de h_{rr}. Lo que hay es una mezcla de efectos, *todos los casilleros del tensor de energía-impulso pueden influir sobre todos los componentes del tensor métrico*. Estamos explorando un nuevo modelo en que la masa debería crear potencial Ψ_g además de Φ_g, y la presión también debería producir potencial Φ_g además de Ψ_g.



Imaginamos un astro masivo próximo a colapsar, su masa sigue aumentando cada vez que *traga* radiación, polvo interestelar, planetas o estrellas de la región vecina. Nos acercamos cada vez más al límite $R_a \to r_S$. La presión aumenta para poder hacer frente a la gravedad incrementada. Pero como *la presión también crea campo gravitatorio*, este efecto relativista obliga a un aumento adicional de presión respecto a lo que predicen los modelos clásicos. Estamos frente a un escenario de *realimentación positiva*. A partir de cierto nivel en que comienza a cumplirse $R_a \approx r_S$, y más todavía si cruzamos hacia $R_a < r_S \to$ es tanta la contribución de p/c^2 al potencial Φ_g que la fuerza gravitatoria supera a lo que puede sostener la presión.

Ya no es posible una distribución estable de masas con equilibrio de fuerzas, el astro se achica indefinidamente hasta que su masa queda toda concentrada en un punto de discontinuidad r=0. A este fenómeno extremo se lo llama colapso gravitacional.
Si hubiera un límite finito $r=R_a$ entre el interior y el exterior del astro, allí las porciones de materia deberían cumplir con ambas métricas: la interna y la externa. El mejor candidato que tenemos para describir esta métrica externa es la solución de Gullstrand-Painlevé deducida en 7.2.4 y confirmada en 9.5.4, y solo permite la existencia de materia en caída libre para $r<r_S$. Ningún valor finito $R_a\neq 0$ parece aceptable; la frontera $r=R_a$ estaría cayendo hasta terminar finalmente en $R_a=0$.
→ Masa concentrada en un punto de densidad infinita es algo difícil de asimilar, en las siguientes secciones intentaremos ofrecer algo más de luz sobre este tema.

10.4.2 Análisis de fuerzas:

La métrica con el potencial espacial Ψ_g da lugar al siguiente Lagrangeano:

$$\mathcal{L}(X^\lambda,\dot{X}^\lambda,\tau)= -m_o.c^2.\ \sqrt{\dot{t}^2.(1+2.\Phi/c^2) -(1-2.\Psi/c^2).(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)/c^2}$$

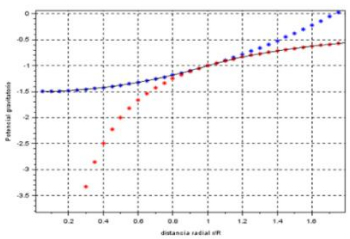
Suponemos que 'z' es la coordenada en la que apunta localmente la gravedad ($\vec{g}$ según $-\hat{z}$).
Los momentos son de la forma $P_z = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{z} = m_o.(1-2.\Psi/c^2).\dot{z}$
Reflexión: La primera observación que surge es que el factor $(1-2.\Psi/c^2)$ parece estar modulando la inercia de las partículas, que aumentaría si se sumergen en zonas de Ψ más bajo igual que aumentaba en Relatividad Especial al moverse con mayor velocidad. En la sección 10.5 retomaremos esta idea.

Las fuerzas gravitatorias son $\partial\mathcal{L}/\partial z = -m_o.\partial\Phi/\partial z\ .\dot{t}^2$
m_o son las porciones de materia que forman parte del astro masivo, que se suponen en reposo macroscópico.
Al ser $\dot{x}=\dot{y}=\dot{z}=0$, y siendo $\sqrt{\ }=1$, despejamos $\dot{t}^2 = 1/(1+2.\Phi/c^2)$
Y reescribimos entonces $\partial\mathcal{L}/\partial z = -m_o.(\partial\Phi/\partial z)/(1+2.\Phi/c^2)$

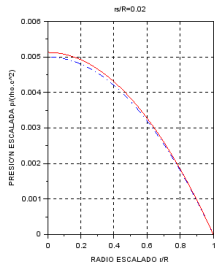
Las ecuaciones de Euler-Lagrange son $dP_z/d\tau = F_z + \partial\mathcal{L}/\partial z$
Esta F_z es necesaria para mantener en reposo a las masas, que en ausencia de F_z seguirían las trayectorias geodésicas de caída libre o de órbita. Es la fuerza de contacto producida por las masas vecinas, en versión covariante (índice bajo).

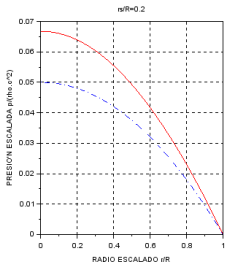
$$F_z= m_o.(\partial\Phi/\partial z)\ /(1+2.\Phi/c^2)$$

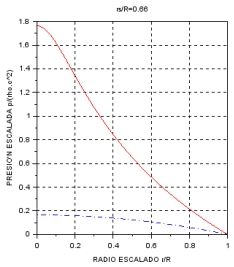
Esta fuerza por unidad de volumen se asocia al gradiente de presión: $F_z/\Delta Vol = -\partial_z p = -\partial p/\partial z$
Juntando estas 2 ecuaciones, y ajustando los factores de escala tal que $m_o=\rho_m.\Delta Vol$,
tenemos que debe cumplirse: $\rho_m.(\partial\Phi/\partial z)\ /(1+2.\Phi/c^2) = -\partial p/\partial z$
En la sección 10.2.3 habíamos supuesto que el balance clásico de fuerzas daba $\rho_m.(\partial\Phi/\partial z) \approx -\partial p/\partial z$.
Ahora nos aparece un factor corrector relativista marcado en rojo, que puede resultar insignificante en escenarios de campos bajos pero que de alguna manera marca una tendencia: *la presión aumenta más que lo que predice la Física Clásica*.
Sin alejarnos demasiado de los conceptos clásicos, recordemos que en la sección 10.2.3 veíamos que el potencial $\Phi_g(r)$ continuaba bajando en el interior del astro: $\Phi_g(r) = M.G/R_a.(-3/2 + 1/2\ .r^2/R_a^2)$



El coeficiente métrico temporal $\alpha(r)=1+2.\Phi_g/c^2$ vale $1-r_S/R_a$ en la frontera del astro pero baja un poco más hasta $1-3/2.r_S/R_a$ en el centro r=0. Cuando nos acercamos a las condiciones de colapso [$\alpha(r)$ muy chico], el gradiente de presión se dispara y produce la distorsión espacial $\beta(r)$ vislumbrada en 7.2.3 (necesaria para proteger contra el cambio de signatura). Podemos comparar la presión clásica=azul y relativista=roja:







Para $r_S/R=0.02$ $r_S/R=0.2$ $r_S/R=0.66$

Advertencia: Si p alcanza al orden de magnitud ρc^2, puede cambiar el signo a la traza T (ver 10.3.5). No sería prudente extrapolar estos resultados hacia esos escenarios extremos.

10.4.3 Fuerza relativista:

Vamos a refinar los resultados recientes calculando la divergencia covariante del tensor de energía-impulso. Los cálculos matemáticos no son simples pero son necesarios como entrenamiento para el capítulo 11 y el capítulo 12, donde trabajaremos intensamente con símbolos de Christoffel asociados a diferentes geometrías.

Aquí utilizamos el método Lagrangeano de 8.3.1 aplicado a la geometría interior de un astro masivo, donde hay un coeficiente temporal $\alpha(r)=(1+2.\Phi/c^2)$ pero también un espacial $\beta(r)$ en principio incógnito.

$\mathcal{L}(X^\lambda,\dot{X}^\lambda,\tau)= -m_o.c^2.\sqrt{\dot{t}^2.\alpha(r) -[\beta(r).\dot{r}^2 + r^2.\dot{\theta}^2 + r^2.\text{sen}^2\theta.\dot{\varphi}^2}\ ]/c^2)$

Para cada coordenada planteamos las ecuaciones geodésicas que nos dan información sobre ciertos coeficientes de Christoffel. Los cálculos no los expondremos al 100% de detalle, en ocasiones omitiremos algunos pasos intermedios para reducir espacio.

→**Temporal**: momento $P_{ct} = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{ct} = -m_o.\alpha(r).\dot{ct}$

$\partial\mathcal{L}/\partial ct=0$ porque la métrica es estática, no depende del tiempo

Euler-Lagrange: $dP_{ct}/d\tau \ -\partial\mathcal{L}/\partial ct=0$

$\alpha(r).\ddot{ct}+\alpha'(r).\dot{r}.\dot{ct}=0$

$\ddot{ct}+\alpha'(r)/\alpha(r).\dot{r}.\dot{ct}=0$

→$\Gamma^0_{r0} = \Gamma^0_{0r} =½.\alpha'(r)/\alpha(r)$

→**Radial**: momento $P_r = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{r} = m_o.\beta(r).\dot{r}$

$\partial\mathcal{L}/\partial r= -m_o.[\alpha'(r)/2.c^2.\dot{t}^2 -\beta'(r)/2.\dot{r}^2 -r.\dot{\theta}^2 -r.\text{sen}^2\theta.\dot{\varphi}^2]$

Euler-Lagrange: $dP_r/d\tau \ -\partial\mathcal{L}/\partial r=0$

$\beta(r).\ddot{r} +\beta'(r).\dot{r}^2 +\alpha'(r)/2.c^2.\dot{t}^2 -\beta'(r)/2.\dot{r}^2 -r.\dot{\theta}^2 -r.\text{sen}^2\theta.\dot{\varphi}^2 =0$

$\beta(r).\ddot{r} + \alpha'(r)/2.c^2.\dot{t}^2 +\beta'(r)/2.\dot{r}^2 -r.\dot{\theta}^2 -r.\text{sen}^2\theta.\dot{\varphi}^2 =0$

$\ddot{r} + \alpha'/(2\beta).c^2.\dot{t}^2 +\beta'/(2\beta).\dot{r}^2 -r/\beta.\dot{\theta}^2 -r/\beta.\text{sen}^2\theta.\dot{\varphi}^2 =0$

→$\Gamma^r_{00}= \alpha'/(2\beta)$ $\Gamma^r_{rr}=\beta'/(2\beta)$ $\Gamma^r_{\theta\theta}= -r/\beta(r)$ $\Gamma^r_{\varphi\varphi}= -r.\text{sen}^2\theta/\beta(r)$

→**Polar:** momento $P_\theta = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{\theta} = m_o.r^2.\dot{\theta}$

$\partial\mathcal{L}/\partial\theta= m_o.r^2.\text{sen}\theta.\cos\theta.\dot{\varphi}^2$

Euler-Lagrange: $dP_\theta/d\tau \ -\partial\mathcal{L}/\partial\theta=0$

$r^2.\ddot{\theta} + 2.r.\dot{r}.\dot{\theta} -r^2.\text{sen}\theta.\cos\theta.\dot{\varphi}^2=0$

$\ddot{\theta} + 2/r.\dot{r}.\dot{\theta} -\text{sen}\theta.\cos\theta.\dot{\varphi}^2=0$

→$\Gamma^\theta_{\theta r}= \Gamma^\theta_{r\theta}= 1/r$ $\Gamma^\theta_{\varphi\varphi}= -\text{sen}\theta.\cos\theta$

→**Acimutal:** momento $P_\varphi = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{\varphi} = m_o.r^2.\text{sen}^2\theta.\dot{\varphi}$

$\partial\mathcal{L}/\partial\varphi= 0$ por la simetría de revolución

Euler-Lagrange: $dP_\varphi/d\tau \ -\partial\mathcal{L}/\partial\varphi=0$

$r^2.\text{sen}^2\theta.\ddot{\varphi} + 2.r.\dot{r}.\text{sen}^2\theta.\dot{\varphi} + r^2.2.\text{sen}\theta.\cos\theta.\dot{\theta}.\dot{\varphi}=0$

$\varphi\ddot{} + 2/r.r\dot{}.\varphi\dot{} + 2.\cos\theta/\text{sen}\theta.\theta\dot{}.\varphi\dot{}=0$

$\rightarrow \Gamma^{\varphi}{}_{\varphi r}=\Gamma^{\varphi}{}_{r\varphi}= 1/r \qquad \Gamma^{\varphi}{}_{\varphi\theta}= \Gamma^{\varphi}{}_{\theta\varphi}= \text{ctg}\theta$

Nos conviene trabajar con un astro masivo formado por materia fluida o gaseosa en vez de sólida, así podemos utilizarle las fórmulas de 10.2.2: $T^{\alpha}{}_{\beta} = (\rho+p/c^2).U^{\alpha}U_{\beta} + p.g^{\alpha}{}_{\beta}$
La materia está en reposo macroscópico, por lo que la cuadrivelocidad tiene solamente componente temporal: $U^{\alpha}=(c.\dot{t},0,0,0)$, $U_{\alpha}=(-\alpha(r).c.\dot{t},0,0,0)$.
La condición de normalización impone $U_{\alpha}U^{\alpha}= -c^2.\dot{t}^2.\alpha(r) = -c^2 \rightarrow U_0U^0= -c^2$

Expresamos entonces $T^{\alpha}{}_{\beta} = M^{\alpha}{}_{\beta} + p.g^{\alpha}{}_{\beta}$,
donde $M^{\alpha}{}_{\beta} =(\rho+p/c^2).U^{\alpha}U_{\beta}$ tiene un único casillero no nulo en $M^0{}_0$.
Tomamos divergencia covariante ∇_{α}:

$\nabla_{\alpha}T^{\alpha}{}_{\beta} = \nabla_{\alpha}M^{\alpha}{}_{\beta} + \nabla_{\alpha}(p.g^{\alpha}{}_{\beta})$ →la métrica no deriva, por propiedad de compatibilidad métrica
$\nabla_{\alpha}T^{\alpha}{}_{\beta} = \nabla_{\alpha}M^{\alpha}{}_{\beta} + (\nabla_{\alpha}p).g^{\alpha}{}_{\beta}$ →$\nabla_{\alpha}=\partial_{\alpha}$ para escalares
$\nabla_{\alpha}T^{\alpha}{}_{\beta} = \nabla_{\alpha}M^{\alpha}{}_{\beta} + (\partial_{\alpha}p).g^{\alpha}{}_{\beta}$ → $g^{\alpha}{}_{\beta} =\delta^{\alpha}{}_{\beta}$ Kronecker
$\nabla_{\alpha}T^{\alpha}{}_{\beta} = \nabla_{\alpha}M^{\alpha}{}_{\beta} + \partial_{\beta}p$ →fórmulas tensoriales de 8.4.6
$\nabla_{\alpha}T^{\alpha}{}_{\beta} = \partial_{\alpha}M^{\alpha}{}_{\beta} +\Gamma^{\alpha}{}_{\alpha\mu}M^{\mu}{}_{\beta}-M^{\alpha}{}_{\mu}\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} + \partial_{\beta}p$
$\nabla_{\alpha}T^{\alpha}{}_{\beta} = \partial_{\alpha}M^{\alpha}{}_{\beta} +\Gamma^{\alpha}{}_{\alpha\mu}M^{\mu}{}_{\beta}-M^{\alpha}{}_{\mu}\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} + \partial_{\beta}p$
$\nabla_{\alpha}T^{\alpha}{}_{\beta} = (I) + (II) - (III) + \partial_{\beta}p$

Separamos en 3 términos y los evaluamos por separado.

→ $(I) = \partial_{\alpha}M^{\alpha}{}_{\beta}$ → solo α=0, β=0 puede aportar algo no nulo
$(I) = \partial_0M^0{}_0$
es nulo porque nada depende del tiempo, $\partial_0=0$.

→ $(II) = \Gamma^{\alpha}{}_{\alpha\mu}M^{\mu}{}_{\beta}$ →solo μ=0, β=0
$(II) = \Gamma^{\alpha}{}_{\alpha 0}M^0{}_0$

En los Christoffels recién calculados no hay ninguno de la forma $\Gamma^{\alpha}{}_{\alpha 0}$, por lo tanto esta segunda contribución también es nula. *Atención*: *Si hubiera varios habría que sumarlos, porque 'α' arriba y 'α' abajo indica que hay implícita una suma, de acuerdo con la convención de la suma.*

→ $-(III) = -M^{\alpha}{}_{\mu}\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}$ →solo α=0, μ=0
$-(III) = -M^0{}_0\Gamma^0{}_{0\beta}$ →Único Christoffel no nulo para β=r
$-(III) = -M^0{}_0.\Gamma^0{}_{0r}$
$-(III) = -(\rho+p/c^2)U^0U_0.\alpha'/(2\alpha)$ →normalización $U_0U^0= -c^2$
$-(III) = (\rho c^2+p).\alpha'/(2\alpha)$

Sustituimos en la derivada covariante:

$\nabla_{\alpha}T^{\alpha}{}_{\beta} = (I) + (II) - (III) + \partial_{\beta}p$
$\nabla_{\alpha}T^{\alpha}{}_{\beta} = \mathbf{0 + 0 + (\rho c^2+p).\alpha'/(2\alpha)} + \partial_{\beta}p$ solo β=r

La ley de conservación del momento $\nabla_{\alpha}T^{\alpha}{}_{\beta} =0$ queda entonces: **$p'(r) + (\rho c^2+p).\alpha'/(2\alpha)=0$**
Comparamos con el resultado 10.4.2, identificando $\alpha(r)=(1+2.\Phi/c^2)$, $\alpha'(r)=2/c^2.\Phi'(r)$
Nos da casi lo mismo: se confirma la presencia de un factor α(r) en el denominador, que ocasiona que el gradiente de presión se dispare cuando nos acercamos a la situación del colapso.
Aparece también algo nuevo: la ρ clásica se cambia por $\rho+p/c^2$, como si en la ecuación geodésica sustituyéramos $\Delta Vol.\partial_r p=F_r$, $\Delta Vol.(\rho+p/c^2)=m_o$ igual que en 10.2.4. Esto contribuye al efecto de realimentación positiva al que hacíamos referencia: el gradiente de presión tiene una contribución que depende de la propia presión. Se combinan 2 efectos: la materia presurizada es más sensible al campo gravitatorio, "pesa más", por eso obliga a un mayor incremento de presión para sostener el equilibrio. Pero a su vez, la energía almacenada en la materia presurizada incide en que se genere más gravedad que con materia sin presurizar, y eso realimenta el ciclo.

10.4.4 Aproximación semi-clásica:

El resultado 10.4.2 está fundamentado en razonamientos clásicos incompletos, imperfectos.
El resultado 10.4.3 es relativista exacto, (basado en la derivación covariante), pero cuesta interpretarlo.
Trataremos de llegar a una interpretación intermedia de la fórmula 10.4.3: relativista pero restringida a un escenario de gravedades débiles, todavía lejos del colapso gravitacional.

Mantenemos el modelo de fluido perfecto para el material que conforma el astro y le aplicamos la ecuación lagrangeana a una partícula o molécula de su fluido:

$$\mathcal{L}(X^\lambda,\dot{X}^\lambda,\tau)= -m_o.c^2.\sqrt{\dot{t}^2.(1+2.\Phi/c^2) -(1-2.\Psi/c^2).(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)/c^2}$$

De acuerdo con lo visto en los modelos probabilísticos de la sección 10.2.2, las componentes ẋ, ẏ, ż de la velocidad ***no son nulas***, los que son nulos son sus valores medios $<x^{\cdot}>,<y^{\cdot}>,<z^{\cdot}>$.
Siendo $\mathcal{L}=-m_o.c^2$ en valor numérico , la raíz vale $\sqrt{\ }=1 \rightarrow t^{\cdot 2}.(1+2.\Phi/c^2) -(1-2.\Psi/c^2).(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)/c^2 =1$

Aunque tenemos indicios de que el potencial Ψ debe ser del mismo orden que el Φ, por el momento lo eliminamos en las instancias en que aparece multiplicado por las velocidades al cuadrado.
Expresamos las componentes de velocidad propia en función de las velocidades coordenadas, para aplicar las estadísticas de Maxwell-Boltzmann:

$\dot{x} =u_x.\dot{t}$, $\dot{y}=u_y.\dot{t}$, $\dot{z}= u_z.\dot{t}$

El factor de dilatación temporal queda:

$t^{\cdot 2}.[(1+2.\Phi/c^2) -(1-2.\Psi/c^2).(u_x^2+u_y^2+ u_z^2)/c^2]=1$ →aprox $|\Psi|\ll c^2$
$t^{\cdot 2}.[(1+2.\Phi/c^2) -(u_x^2+u_y^2+ u_z^2)/c^2]\approx 1$ →tomamos valores medios
$<t^{\cdot 2}>.[(1+2.\Phi/c^2) -(<u_x^2+u_y^2+ u_z^2>/c^2]\approx 1$ →aparece v_T=velocidad térmica
$<t^{\cdot 2}>.[1+2.\Phi/c^2 -3v_T^2/c^2]\approx 1$
$<t^{\cdot 2}>\approx 1 / [1+2.\Phi/c^2 - 3v_T^2/c^2]$

Calculamos la fuerza gravitatoria de Lagrange $\partial\mathcal{L}/\partial z$, siendo 'z'=dirección local de la gravedad.

$\partial\mathcal{L}/\partial z = -m_o.[\partial\Phi/\partial z .\dot{t}^2 + \partial\Psi/\partial z.(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)/c^2]$ →factor común
$\partial\mathcal{L}/\partial z = -m_o.\dot{t}^2.[\partial\Phi/\partial z + \partial\Psi/\partial z.(u_x^2+u_y^2+ u_z^2)/c^2]$

El momento en dirección-z es $P_z = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{z} = m_o.(1-2.\Psi/c^2).z^{\cdot}$
Su derivada temporal es $dP_z/d\tau = m_o.(1-2.\Psi/c^2).z^{\cdot\cdot} -2/c^2.m_o.z^{\cdot}.[x^{\cdot}.\partial_x\Psi+ y^{\cdot}.\partial_y\Psi+ z^{\cdot}.\partial_z\Psi]$
Elegimos los ejes locales tal que los potenciales Φ,Ψ varían solo en dirección 'z'.

$dP_z/d\tau = m_o.(1-2.\Psi/c^2).z^{\cdot\cdot} -2/c^2.m_o.z^{\cdot 2}.\partial_z\Psi$
$dP_z/d\tau = m_o.(1-2.\Psi/c^2).z^{\cdot\cdot} -2/c^2.m_o.t^{\cdot 2}.u_z^2.\partial_z\Psi$

Combinamos los términos sombreados en gris, teniendo en cuenta que la ecuación de Euler-Lagrange no es una geodésica de caída libre porque aparece la fuerza de la presión F_z.

$dP_z/d\tau -\partial\mathcal{L}/\partial z = F_z$
$m_o.(1-2.\Psi/c^2).z^{\cdot\cdot} -2/c^2.m_o.t^{\cdot 2}.u_z^2.\partial_z\Psi + m_o.\dot{t}^2.[\partial\Phi/\partial z + \partial\Psi/\partial z.(u_x^2+u_y^2+ u_z^2)/c^2] = F_z$
$m_o.\{(1-2.\Psi/c^2).z^{\cdot\cdot} + \dot{t}^2.[\partial\Phi/\partial z + \partial\Psi/\partial z.(u_x^2+u_y^2 -u_z^2)/c^2\} = F_z$

Esta viene siendo la ecuación del movimiento de una partícula o molécula de masa en reposo m_o.
Si sumamos todas las contribuciones dentro de un volumen ΔVol, donde hay 'N' partículas:

- m_o se transforma en $N.m_o=\rho_o.\Delta Vol$, masa total
- $z^{\cdot\cdot}$ se transforma en $N.<z^{\cdot\cdot}> \approx 0$ porque el valor medio es nulo, en equilibrio macroscópico
- $\dot{t}^2$ se convierte en $<\dot{t}^2>$, utilizamos su promedio calculado hace unas líneas
- Las velocidades al cuadrado aportan según su valor medio visto en 10.2.2 $<u_x^2>= <u_y^2> = <u_z^2> =v_T^2$
- F_z se convierte en $-\Delta Vol.\partial p/\partial z$

$\rho_o.\Delta Vol.<\dot{t}^2>.[\partial\Phi/\partial z + \partial\Psi/\partial z.v_T^2/c^2] = -\Delta Vol.\partial p/\partial z$

$\rho_o.\langle \dot{t}^2 \rangle.[\partial\Phi/\partial z + \partial\Psi/\partial z.v_T^2/c^2] = -\partial p/\partial z$ →sustituimos $\langle \dot{t}^2 \rangle \approx 1/[\ 1+2.\Phi/c^2 - 3v_T^2/c^2\ ]$

$\rho_o/[1+2.\Phi/c^2 - 3v_T^2/c^2].[\partial\Phi/\partial z + \partial\Psi/\partial z.v_T^2/c^2] = -\partial p/\partial z$

Simplificamos apoyándonos en la hipótesis de campos débiles, $|\Phi| \ll c^2, v_T^2 \ll c^2$

$\rho_o.(1+3v_T^2/c^2).[\partial\Phi/\partial z + \partial\Psi/\partial z.v_T^2/c^2]/(1+2.\Phi/c^2) \approx -\partial p/\partial z$

Identificamos la "densidad térmica efectiva ρ" de los desarrollos 10.2.2: $\rho = \rho_o.(1+3v_T^2/c^2)$

$\rho.[\partial\Phi/\partial z + \partial\Psi/\partial z.v_T^2/c^2]/(1+2.\Phi/c^2) \approx -\partial p/\partial z$

En varios pasajes de este trabajo apuntamos la sospecha de que los potenciales Ψ y Φ deberían coincidir en los regímenes de campos débiles.
Si aplicamos aquí esa sustitución Ψ≈Φ, llegamos a una interpretación interesante:

$\rho.\ \partial\Phi/\partial z.[1+v_T^2/c^2]/(1+2.\Phi/c^2) \approx -\partial p/\partial z$

$\partial\Phi/\partial z.[\rho + \rho.v_T^2/c^2]/(1+2.\Phi/c^2) \approx -\partial p/\partial z$ →$p = \rho.v_T^2$ del modelo microscópico de 10.2.2

$$(\rho + p/c^2).(\partial\Phi/\partial z)\ /(1+2.\Phi/c^2) \approx -\partial p/\partial z$$

La igualdad $\Psi \approx \Phi$ resulta plenamente compatible con la ecuación exacta deducida en 10.4.3

Un detalle interesante es que aquí la masa que aparece en el Lagrangeano es $m_o = \tilde{m}$, masa molecular. Lo que repercutió en que debimos sustituir $N.m_o = \rho_o.\Delta Vol$ en la ecuación geodésica. Al tratar a las moléculas en forma individual, no podíamos utilizar $\rho + p/c^2$ en lugar de ρ como hacíamos en 10.4.3 para porciones formadas por múltiples moléculas. La hipótesis Ψ≈Φ es necesaria para proveer el factor corrector necesario y recuperar el mismo resultado.

Reflexión:
Que la presión contribuya a la gravedad no debería sorprender tanto si pensamos en astros formados por gas caliente o plasma. Las moléculas de un gas, incluso en estado de reposo macroscópico, tienen velocidades microscópicas aleatorias asociadas a su presión y a su temperatura. Y es comprensible suponer que las masas rápidas deberían crear más gravedad que las masas quietas, por la equivalencia masa←→energía.
Podemos sumar argumentos en ese sentido considerando la compresibilidad de los materiales que forman los astros, ya sea que estén en estado sólido o fluido: al aumentar la presión (componentes T^{11}, T^{22}, T^{33}) el material se comprime y aumenta la densidad, lo que repercute en el potencial presente en h^{00}.
Aún los materiales ideales llamados *incompresibles* tienen un mínimo de compresibilidad proporcional a $1/c^2$, porque si no lo tuvieran sería posible transmitir información a velocidad superlumínica entre dos extremos de un bloque rígido y se violarían la causalidad y la Relatividad Especial. (Los materiales reales transmiten vibraciones a velocidad acústica, que es varios órdenes de magnitud menor que 'c').

Ejercicio: Demostrar que en un sólido ideal con la mínima compresibilidad teórica posible, una presión 'p' produce un incremento de densidad equivalente $\Delta\rho_m \approx 3p/c^2$. Sugerencia: utilizar un modelo elástico del estilo del presentado en el colchón del capítulo 7.4, con la condición $m_o.c^2 = k_o.l_o^2$.

En párrafos anteriores mencionamos que un parecido Ψ≈Φ era otra manifestación de la mezcla o cruzamiento de efectos entre los componentes energéticos del tensor $T^{\alpha\beta}$ y las perturbaciones métricas $h^{\alpha\beta}$:

- p/c^2, ubicado en T^{11}, no alcanza como única fuente para producir un Ψ apreciable (componente h^{11})
- La contribución principal de h^{11} debe provenir de ρ_m, ubicado en T^{00}.
- Entonces ρ_m de T^{oo} influye sobre Φ ubicado en h^{00} *pero también sobre Ψ ubicado en* h^{11}.

No sería la primera vez que nos encontramos cruzamientos entre el espacio y el tiempo, ya lo habíamos enfrentado en los capítulos de Relatividad Especial.

10.4.5 Flujos másicos:

El modelo de polvo y el de fluido tienen en común la presencia de flujos de materia (o de energía). Repetimos la transformación de Lorentz a partir del referencial Σ' en el cual la materia está quieta, prestando esta vez más atención a la parte espacial que en 7.1 habíamos ignorado por causa de un factor v_o^2/c^2.

$\mathcal{L}'(X'^{\lambda},\dot{X}'^{\lambda},\tau)= -m_o.c^2.\sqrt{\dot{t}'^2.(1+2.\Phi'/c^2) -(1-2.\Psi'/c^2).(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 + \dot{z}'^2)/c^2}$

En un principio podemos seguir aferrados al modelo en que $[]^2h^{\alpha\beta}$ es proporcional a $T^{\alpha\beta}$ sin "cruzamiento de efectos". Para el caso del polvo p'=0, así que comenzamos considerando $\Psi' \approx 0$.

Sustituimos t',x',y',z' por sus correspondientes t,x,y,z en una transformación de Lorentz.

Parte temporal:	$(c.\dot{t})^2.(1 +2.\Phi'/c^2.\gamma_o^2).$	$\rightarrow \Phi \approx \Phi'.\gamma_o^2$
Parte espacial-x:	$-\dot{x}^2.(1 -2.\Phi'/c^2.\gamma_o^2.v_o^2/c^2)$	$\rightarrow \Psi \approx \Phi'.v_o^2/c^2 .\gamma_o^2$

$\gamma_o = 1/\sqrt{1-v_o^2/c^2}$, v_o=velocidad a la que se mueve Σ' y junto con él todas sus masas

Cuando crece la velocidad v_o y nos acercamos al límite $v_o \rightarrow c$, la perturbación espacial (con signo de contracción de longitudes) pasa a ser del mismo orden que la perturbación temporal. Y amplificada por el mismo factor γ_o que crece indefinidamente cuando $v_o \rightarrow c$.

Nuevamente podríamos sembrar la misma sospecha que en 10.4.2: si $\Psi \approx \Phi$ en los escenarios de alta energía, también podrían tener valores similares en los escenarios de baja energía. Dicho de otra manera: también podría haber un Ψ' en Σ' aunque las masas estén quietas en ese referencial.

En la sección 7.1 veíamos un argumento a favor de este hecho: separar el efecto de la masa propia M_o (cantidad de materia) y el ΔM incremento de masa equivalente por energía cinética →dichos incrementos cinéticos producían un $\Delta\Psi \approx \Delta\Phi$. Sería una situación asimétrica si las M_o contribuyeran únicamente al Φ y no aportaran nada al Ψ, es más simétrico el escenario en que $\Psi \approx \Phi$.

La incorporación del Ψ_g no produce ningún cambio inmediato en la mayoría de los análisis de fuerzas que venimos realizando en capítulos anteriores. Esto es debido al hecho de que aparece en el Lagrangeano multiplicado por factores v^2/c^2 que habitualmente son chicos ($v \ll c$) en escenarios de gravedad débil.
Sin embargo, hay dos excepciones a esta afirmación:

- En el estudio de la deflexión de la luz proveniente de estrellas remotas (sección 6.7.4), las partículas involucradas son fotones moviéndose a velocidad lumínica $v \rightarrow c$ y para ellos la contribución es significativa; dado que el resultado experimental es el doble de nuestros cálculos semiclásicos, una posible explicación es que se cumpla en forma aproximada $\Psi \approx \Phi$ como vimos en 7.2.2.
- El otro escenario en el que este Ψ muestra su influencia es en la precesión anómala del perihelio orbital (6.7.1); aunque el efecto es muy débil, su acumulación a lo largo de años y siglos es suficiente como para ser detectada por los astrónomos. Los desarrollos de la sección 7.2.2 muestran que el potencial espacial Ψ también proporciona en este escenario un ajuste al modelo teórico que lo alinea mejor con los resultados experimentales.

10.5 Masa gravitatoria activa y pasiva.

Presentamos a continuación un conjunto de razonamientos basados en el concepto de "masa gravitatoria", con el objetivo de agregar argumentos para justificar la necesidad de un potencial espacial $\Psi \approx \Phi$.

Antes de contemplar el potencial Ψ, nuestro lagrangeano "incompleto" tenía la forma:

$$\mathcal{L}(X^\lambda,\dot{X}^\lambda,\tau)= -m_o.c^2.\sqrt{\dot{t}^2.(1+2.\Phi_g/c^2) -(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)/c^2 -4.\dot{t}/c^2.(A_{gx}.\dot{x} + A_{gx}.\dot{y} + A_{gz}.\dot{z})}$$

Comenzamos analizando el caso especial de una partícula quieta con $\dot{x}=\dot{y}=\dot{z}=0$, para desprendernos momentáneamente de los efectos gravitomagnéticos.

$$\partial\mathcal{L}/\partial x= -m_o.\dot{t}^2.\partial\Phi_g/\partial x$$

$$P_x=\partial\mathcal{L}/\partial\dot{x} = m_o.(\dot{x} + 2.\dot{t}.A_{gx})$$

$$dP_x/d\tau=m_o.(\ddot{x} + 2.\dot{t}^2.\partial A_{gx}/\partial t)$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange quedan:

$$dP_x/d\tau =\partial\mathcal{L}/\partial x$$

$$m_o.(\ddot{x} + 2.\dot{t}^2.\partial A_{gx}/\partial t) = -m_o.\dot{t}^2.\partial\Phi_g/\partial x$$

Aislamos la aceleración del lado izquierdo y reconocemos que cumple un rol de fuerza todo lo que queda del lado derecho y causa aceleración.

$$m_o.\ddot{x} = -m_o.\dot{t}^2.\partial\Phi_g/\partial x - 2m_o.\dot{t}^2.\partial A_{gx}/\partial t$$

$$m_o.\ddot{x} = -\dot{t}^2.(m_o.\partial\Phi_g/\partial x +2m_o.\partial A_{gx}/\partial t)$$

Si continuamos la analogía Gravitación-Electromagnetismo introducida en 7.1, tendríamos un campo que podríamos llamar "gravito-eléctrico" y de valor $\vec{E_g} = -\nabla\Phi_g - \partial\vec{A_g}/\partial t$.

El campo $\vec{E_g}$ tiene 2 componentes, y estos cálculos lagrangeanos están mostrando que la sensibilidad es diferente para cada una de las contribuciones: una masa de valor m_o presenta una sensibilidad de $2m_o$ en reacción a los campos variables en el tiempo creados por masas móviles.

Diríamos entonces que la "masa gravitatoria pasiva" vale $2m_o$ para estos incrementos de campo gravitatorio.

Si liberamos la restricción $\dot{x}=\dot{y}=\dot{z}=0$ y permitimos que la masa pasiva se mueva con velocidad arbitraria $\vec{u}$, un análisis lagrangeano similar nos muestra que la fuerza gravitomagnética es $\vec{F_g}\approx(2m_o).\vec{u}\wedge\vec{B_g}$. Este resultado lo interpretamos como que la masa gravitomagnética pasiva vale $2m_o$.

Por otro lado, el cambio de variable Lorentz de la sección 7.1.3 nos transportaba de un sistema Σ' con masas 'M' quietas a un sistema Σ donde las masas se veían móviles.

$$\mathcal{L}'(X'^h,\dot{X}'^h,\tau) = -m_o.c^2.\sqrt{(1+2\Phi_g'/c^2).\dot{t}'^2 -\dot{x}'^2/c^2 -\dot{y}'^2/c^2 -\dot{z}'^2/c^2}$$

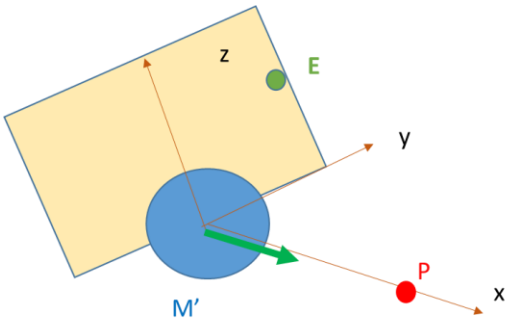
En el referencial Σ, la parte temporal queda $\dot{t}^2.(1+2\Phi_g'/c^2.\gamma_o^2)$

Identificamos:

$\Phi_g = \Phi'_g.\gamma^2$ →sustituimos el potencial de Newton Φ'_g

$\Phi_g = -M_o.G/r'.\gamma^2$

r'=distancia medida en el referencial Σ', que por Lorentz resulta $r'=\sqrt{\gamma^2(x-v_o.t)^2+y^2+z^2}$



Para un punto P (rojo en la figura) ubicado en el eje polar del flujo másico, y=z=0, r'=γ.r.

$\Phi_g = -M_o.G/r'.\gamma^2$

$\Phi_g = -M_o.G/(\gamma.r).\gamma^2$ $\rightarrow\Phi_g = -\gamma.M_o.G/r$

El potencial está incrementado un factor γ respecto al que produciría una masa quieta a la misma distancia.

Decimos que $M=\gamma.M_o$ es la masa efectiva total creadora de potencial.

Para un punto E (verde en la figura) ubicado en el plano ecuatorial del flujo másico, $x=v_o.t$, $r'=r$.

$\Phi_g = -M_o.G/r'.\gamma^2$

$\Phi_g = -M_o.G/(r).\gamma^2$ $\rightarrow \Phi_g = -\gamma^2.M_o.G/r$

Ahora el factor de incremento es γ^2, y **$M=\gamma^2.M_o$** es la masa gravitatoria efectiva.

Podemos descomponer la masa efectiva total en una parte de reposo y una parte cinética, aprovechando la simplificación que nos permite el hecho de operar a bajas velocidades con $\gamma^2 \approx (1+v_o^2/c^2)$.

$M_o.\gamma^2 \approx M_o.(1+v_o^2/c^2)$

$M_o.\gamma^2 \approx M_o + M_o.v_o^2/c^2$

$M_o.\gamma^2 \approx M_o + 2.\frac{1}{2}.M_o.v_o^2/c^2$

$M_o.\gamma^2 \approx M_o + 2.\frac{1}{2}.M_o.v_o^2/c^2$ →encontramos la energía cinética clásica E_{cinet}

$M_o.\gamma^2 \approx M_o + 2.E_{cinet}/c^2$

$M_o.\gamma^2 \approx M_o + 2.E_{cinet}/c^2$ →aplicamos relación de Einstein 5.3: $E_{cinet}=\Delta M'.c^2$

$M_o.\gamma^2 \approx M_o + 2.\Delta M'$

Para situaciones en las que $M= \gamma^2.M_o$, (puntos ubicados en el plano ecuatorial), la energía cinética produce el doble de potencial gravitatorio que el que correspondería a su masa equivalente si estuviera quieta y actuara a la misma distancia. Aquí tenemos otro factor '2'.
$\Delta M'$, que es el incremento de masa por energía cinética, actúa como $2.\Delta M'$ a los efectos de la generación de campos gravitatorios. Afirmamos entonces que $2.\Delta M'$ es el valor de su masa gravitatoria activa.

Para situaciones en las que $M= \gamma.M_o$, (puntos ubicados en el eje polar de las corrientes másicas), la masa gravitatoria activa es simplemente $\Delta M'$, tal como se esperaría por Relatividad Especial.

Para masas 'M' con velocidades orientadas arbitrariamente, y para puntos 'P' ubicados a cualquier ángulo, no está claro cuál factor efectivo se debe usar (probablemente uno intermedio entre 1 y 2). Pero sí está claro que en términos medios hay un efecto de incremento mayor que el que se esperaría por Física Clásica y por Relatividad Especial.

Ambos factores '2' (o similares) parecen asociarse a una especie de equivalencia, que recuerda en cierta forma al Principio de Equivalencia de 6.1 entre masa inercial y masa gravitatoria. Aquí la equivalencia se da entre la masa gravitatoria activa y la masa gravitatoria pasiva. Es decir, en los efectos adicionales causados por masas activas móviles 'M' y en su repercusión sobre masas pasivas 'm'.

Ya son varias masas que parecen actuar o reaccionar con un factor efectivo de '2' (o al menos mayor a 1), y podemos cometer el atrevimiento de extender esta equivalencia a la masa gravitomagnética.
La fuerza "gravitomagnética" es el doble de su análoga Lorentz en el Electromagnetismo.
Una masa 'm' en movimiento se comporta como "2.m" a los efectos de responder al campo $\vec{B_g}$.
¿Qué tal si las masas 'M' generadoras del campo $\vec{B_g}$ también actuaran como "2.M"?

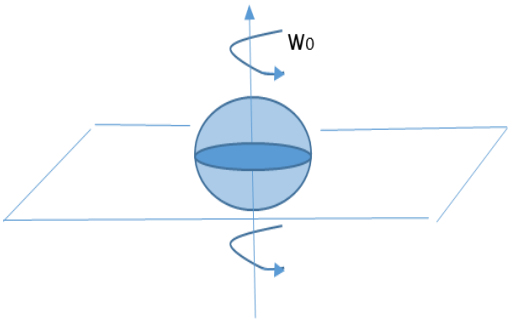
Si reflexionamos veremos que en varios capítulos previos fueron surgiendo indicios sobre la equivalencia entre los distintos tipos de masas:

- En Relatividad Especial (capítulo 5) nos encontramos que las masas móviles incrementan su inercia por un factor del orden de $\dot{t}$.
- En Relatividad General se repite el fenómeno, con el agregado de que los factores $\dot{t}$ también contemplan la posición dentro del campo gravitatorio y no solo la velocidad.
- Finalmente, la masa gravitatoria "activa" causante de los potenciales también es sensible a factores $\dot{t}$ o $\dot{t}^2$, lo cual se insinúa con las fórmulas de 10.2.2 $T^{\alpha\beta}=\rho_o U^\alpha U^\beta$.

Siendo esperable que se genere gravedad más intensa si las masas causantes se mueven rápido o actúan desde una zona de mayor $\dot{t}$.

10.5.1 Esfera rotatoria:

Podemos ver que la hipótesis *atrevida* de las fuentes másicas móviles 'M' actuando como "2M" se confirma en el escenario de una masa 'M' en rotación.



Abordamos el problema en 3 etapas:

1. Analogía electromagnética con Q, μ_o, $\vec{A}$, $\vec{B}$.
2. Gravitomagnetismo semi-clásico con M, μ_G, $\vec{A_g}$, $\vec{B_g}$.
3. Gravitomagnetismo relativista (métrico).

Analogía electromagnética:

El caso análogo electromagnético corresponde a una cáscara esférica con radio 'R_o', velocidad angular de rotación 'w_o' alrededor del eje polar $\hat{z}$, y carga total 'Q' distribuida uniformemente en toda su superficie. Sugerimos como ejercicio realizar los cálculos matemáticos o buscar la justificación en textos de Electromagnetismo. Carga móvil significa corriente, causa de campos magnéticos.

El potencial vectorial magnético vale:

en el exterior de la esfera: $\vec{A}=\mu_o.m_o/(4\pi).sen\theta/r^2.\vec{e_\varphi}$

en el interior de la esfera: $\vec{A}=\mu_o.m_o/(4\pi).r.sen\theta/R_o^3.\vec{e_\varphi}$

Siendo m_o el momento dipolar magnético de la distribución de cargas y corrientes, de valor:

$m_o=Q.R_o^2.w_o/3$ para esfera hueca o cáscara esférica con carga superficial 'σ' homogénea $\sigma=Q/(4\pi R_o^2)$

Tendríamos $m_o=Q.R_o^2.w_o/5$ para una esfera maciza con carga volumétrica 'ρ' uniforme; pero no vamos a utilizar esta configuración, estudiaremos únicamente la cáscara hueca.

Sustituido en el potencial interior, queda:

$A_\varphi = \mu_o.m_o/(4\pi).r.sen\theta/R_o^3$

$A_\varphi = \mu_o.Q.R_o^2.w_o/3/(4\pi).r.sen\theta/R_o^3$

$A_\varphi = \mu_o.Q.w_o/(12\pi).r.sen\theta/R_o$

Gravitomagnetismo semi-clásico:

Al transportar un problema electromagnético a su equivalente gravitatorio, las correspondencias son:

$\vec{A}\rightarrow\vec{A_g}$, $Q\rightarrow M_0$, $\epsilon_o\rightarrow\epsilon_G=-1/(4\pi G)$, $\mu_o\rightarrow\mu_G=(-4\pi G)/c^2$

$A_\varphi = \mu_o.Q.w_o/(12\pi).sen\theta.r/R_o$

$A_{g\varphi} = -G/(3c^2).M_0.sen\theta.r/R_o$

$A_{g\varphi} = -M_0.G/c^2.w_o/3.r.sen\theta/R_o$

A este potencial lo llamamos clásico, para distinguirlo del relativista que calcularemos a continuación.

$$A_{g\varphi(clásico)}= -M_0.G.w_o/(3c^2).r.sen\theta/R_o \quad [EC\text{-}1]$$

Estudio métrico:

Tomamos como punto de partida la métrica de Minkowski, si no hubiera ninguna masa rotante.

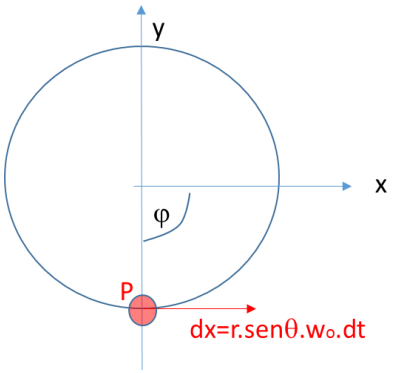
$(dS)^2= -(c.dt)^2 + dr^2 + r^2.d\theta^2 + r^2.sen^2\theta.d\varphi^2$ Coordenadas esféricas en el referencial Σ.

Nos movemos a otro referencial Σ' que rota a velocidad angular constante w_o. Ejecutamos una transformación angular similar a la de Lorentz, tal como vimos en 7.2.1.

$dt = \gamma.(dt' + \alpha.d\varphi')$ $\quad\quad$ $dt' = \gamma.(dt - \alpha.d\varphi)$

$d\varphi = \gamma.(d\varphi' + w_o.dt')$ $\quad\quad$ $d\varphi' = \gamma.(d\varphi - w_o.dt)$

Los puntos que en Σ tienen rotación $d\varphi=w_o.dt$ se ven quietos en Σ' con $d\varphi'=0$.
Un viajero solidario a esos puntos experimenta un tiempo propio $d\tau$ proporcional al tiempo coordenado dt', con un posible efecto de dilatación temporal variable a medida que aumenta el radio 'r'.
En el capítulo 7.2.1 elegíamos un radio de calibración $r=r_o$ en el cual se cumplía exactamente $d\tau=dt'$ para todo ángulo θ. Ahora vamos a extender la calibración a todas las coordenadas radiales $r<R_o$.



Buscamos que la transformación angular se parezca lo máximo posible a una de Lorentz, por lo tanto identificamos la relación $dt' = \gamma.(dt - \alpha.d\varphi)$ con $dt' = \gamma.(dt - v_o/c^2.dx)$.
La velocidad lineal es $v_o=r.sen\theta.w_o$,
los desplazamientos lineales son $dx=r.sen\theta.d\varphi$
y el factor gamma es $\gamma^2=1/(1-v_o^2/c^2)$.
Lo que implica que debe cumplirse $\alpha=w_o.r^2.sen^2\theta/c^2$ [EC-2]. Usaremos luego esta EC-2.

En el referencial Σ' agregamos la masa rotante, solidaria a nuestro giro. Esta masa, que en Σ' vemos quieta, produce un potencial newtoniano $\Phi'_g= -M_0.G/R_o$ constante en el interior de la cáscara hueca. Este potencial se suma a los efectos centrífugos y Coriolis (que podemos pensar que son causados por las galaxias remotas que giran a nuestro alrededor en ese referencial).
En la métrica aparece un nuevo término aditivo $-2.\Phi'_g/c^2.(c.dt')^2= -2.\Phi'_g.dt'^2=2.M_0.G/R_o.dt'^2$

Al volver al referencial original Σ, desaparecen todos los efectos centrífugos y de Coriolis y solo se conserva el término aditivo de la masa rotante.
$(dS)^2= -(c.dt)^2 \; +2.M_0.G/R_o.dt'^2 + dr^2 + r^2.d\theta^2 + r^2.sen^2\theta.d\varphi^2$

Aplicamos Lorentz inverso para eliminar las variables primadas

$dt' = \gamma_o.(dt - \alpha.d\varphi)$ $\quad\quad$ $\rightarrow dt'^2= \gamma^2.(dt^2 -2\alpha.dt.d\varphi + \alpha^2.d\varphi^2)$

$(dS)^2= -(c.dt)^2 + 2.M_0.G/R_o.\gamma^2.(dt^2 -2\alpha.dt.d\varphi + \alpha^2.d\varphi^2) + dr^2 + r^2.d\theta^2 + r^2.sen^2\theta.d\varphi^2$
$(dS)^2= -(c.dt)^2.(1-2.M_0G/R_o.\gamma^2/c^2) \; -4.M_0.G/R_o.\gamma^2\alpha.dt.d\varphi + dr^2+r^2.d\theta^2 + (r^2.sen^2\theta + 2.M_0.G/R_o.\gamma^2.\alpha^2).d\varphi^2$

Se *contaminan* varios términos de la métrica, los analizamos de a uno por vez.

- Parte temporal $(1-2.M_0G/R_o.\gamma^2/c^2)$

En la métrica temporal encontramos la asociación $\Phi_g=\Phi'_g.\gamma^2$, $M=M_0.\gamma^2$, en coherencia con la suposición de que las masas móviles 'M' producen más gravedad que si estuvieran en reposo 'M_0'.
En el límite de los campos bajos el factor γ^2 se aproxima $\gamma^2\approx 1 + r^2.sen^2\theta.w_o^2/c^2$, por lo tanto

$\Phi_g=\Phi'_g.(1 + sen^2\theta.r^2.w_o^2/c^2)$

Ejercicio: Evaluar los distintos $r<R_o$ y $\theta\in[0,\pi]$ para concluir que, en términos medios, la energía cinética de la cáscara genera una gravedad más cercana a ΔM que a 2ΔM.

- Parte mixta o cruzada $-4.M_0.G/R_o.\gamma^2.\alpha.dt.d\varphi$

El término cruzado de la métrica modela el efecto gravitomagnético, que en coordenadas cartesianas sería:
$(dS)^2 = -(c.dt)^2.(1+2.\Phi_g/c^2) + (1-2.\Psi_g/c^2).(dx^2+dy^2+dz^2) +4.dt.(A_{gx}.dx + A_{gy}.dy +A_{gz}.dz)$
En los puntos donde coinciden los versores $\hat{e}_\varphi=\hat{x}$, tenemos $\varphi=-\pi/2$ y $dx=r.sen\theta.d\varphi$.
La equivalencia esperada sería entonces:

$-4.M_0.G/R_o.\gamma^2.\alpha.dt.d\varphi \approx 4.dt.A_{gx}.dx$
$-4.M_0.G/R_o.\gamma^2.\alpha.dt.d\varphi \approx 4.dt.A_{gx}.dx$ $\quad dx=r.sen\theta.d\varphi$
$-4.M_0.G/R_o.\gamma^2.\alpha.dt.d\varphi \approx 4.dt.A_{gx}.r.sen\theta.d\varphi$
$-4.M_0.G/R_o.\gamma^2.\alpha.dt.d\varphi \approx 4.dt.A_{gx}.r.sen\theta.d\varphi$ $\quad$ simplificamos
$-M_0.G/r.\gamma^2\alpha \approx A_{gx}.r.sen\theta$ $\quad$ aproximamos $\gamma\approx1$ a baja velocidad
$-M_0.G/r.\alpha \approx A_{gx}.r.sen\theta$ $\quad$ sustituimos EC-2 $\alpha=w_o.r^2.sen^2\theta/c^2$
$-M_0.G/r.w_o.r^2.sen^2\theta/c^2 \approx A_{gx}.r.sen\theta$ $\quad$ agrupamos

$A_{gx(relativista)} \approx -M_0.G/c^2.w_o.sen\theta.r/R_o$ $\quad$ [EC-4], comparamos con [EC-1]
$A_{g\varphi(clásico)} = -M_0.G/(3c^2).w_o.sen\theta.r/R_o$ $\quad$ [EC-1] repetimos de párrafos anteriores

El cambio de variable angular produce una coincidencia perfecta en cuanto a las variaciones en 'r' (lineal) y en 'θ' (sinusoidal), pero con un valor **triple** comparado con el que se obtendría extrapolando hacia la gravitación la Ley de Ampere clásica del Electromagnetismo.
Tenemos entonces:

Afectación temporal g_{oo}: factor ≈1 (evaluado en el ejercicio anterior)
Afectación mixta $g_{0\varphi}$: factor ≈ 3.

Esto justifica la hipótesis *atrevida* que formulamos en 10.5.1 sobre la necesidad de modificar la Ley de Ampere del Gravitomagnetismo con un factor 2.

10.5.2 Gravitomagnetismo 2.0:

A esta nueva versión del Gravitomagnetismo la llamamos "2.0", para diferenciarla de la primera versión tentativa del capítulo 7.1, y para recordar que involucra un nuevo factor 2 que se aleja del clásico.
Nos despedimos momentáneamente de los astros rotatorios, hasta volver a ellos en la métrica de Kerr 12.4.

Volvemos a velocidades de desplazamiento lineal como las del capítulo 7.1:

- Sistema Σ' con masas quietas, potenciales Φ' y Ψ'. Se mueve con velocidad v_o respecto a Σ.
- Sistema Σ ve a las masas móviles.

Repetimos los cambios de variable de Lorentz entre Σ y Σ', esta vez prestando atención a los términos mixtos de la métrica y a los dos potenciales Φ' y Ψ'.

$$\mathcal{L}'(X'^{\lambda},\dot{X}'^{\lambda},\tau)= -m_o.c^2.\sqrt{\dot{t}'^2.(1+2.\Phi'/c^2)-(1-2.\Psi'/c^2).(\dot{x}'^2+\dot{y}'^2+\dot{z}'^2)/c^2}$$

se convierte a las variables t, x, y, z.
El término mixto x-t toma la forma: $2.\dot{x}.\dot{t}.\gamma_o^2.(\Phi'+\Psi').(2.v_o/c^2)$, compatible con $A_{gx} \approx \gamma_o^2.(\Phi'+\Psi').v_o/c^2$
El factor-2 adicional que estamos buscando puede surgir a partir de la contribución del potencial espacial Ψ', si ambos potenciales Φ' y Ψ' aportan por igual proporción. →Es decir, Ψ'≈ Φ'.

Esta reformulación del Gravito-electromagnetismo implica modificar varias ecuaciones, empezando por la Ley de Ampere que tendría un factor doble respecto a su análoga electromagnética.
$\nabla\wedge \vec{B_g} = 2.\text{"}\mu_G\text{"}.(\vec{j_m} + \text{"}\epsilon_G\text{"}.\partial_t\vec{E})$ sustituimos "ϵ_G"$= -1/(4\pi G)$ y "μ_G"$= 1/(\epsilon_G.c^2)$
Luego de varios cálculos llegamos a ecuaciones muy similares a las del Electromagnetismo pero con ciertos factores 2 o ½ que resaltamos a continuación.

$\vec{F} = m.\vec{E_g} + 2.m.\vec{u}\wedge\vec{B_g}$
$\vec{E_g} = -\nabla\Phi_g - \frac{1}{2}.\partial_t\vec{A_g}$
$\nabla^2\vec{A_g} - 1/c^2.\partial_t{}^2\vec{A_g} = 8.\pi.G\backslash c^2.\vec{j_m}$ ecuación vectorial de ondas
$\nabla^2\Phi_g - 1/c^2.\partial_t{}^2\Phi_g = 4.\pi.G.\rho_m$ ecuación escalar de ondas
$\nabla\cdot\vec{A_g} + 2/c^2.\partial_t\Phi_g = 0$ condición de calibre "Lorenz gauge"

Los d'Alembertianos de $\vec{A_g}$ y Φ_g tienen ahora diferentes factores de proporcionalidad con $\vec{j_m}$ y ρ_m,
ya no es sostenible una ecuación simplificada con proporcionalidad pura entre ambos tensores $[]^2h^{\alpha\beta}$ y $T^{\alpha\beta}$.
Deberemos buscar otra ecuación que siga siendo tensorial (¡y lineal!) pero que modele adecuadamente la posibilidad de efectos cruzados.

Lecturas: En distintas fuentes consultadas observamos que no hay acuerdo universal en los factores ½, 2 o 4 que diferencian a estas ecuaciones de sus análogas electromagnéticas.
Citamos una fuente donde se utilizan los mismos factores que en este trabajo:
[https://arxiv.org/pdf/gr-qc/0311030.pdf], autor Bahram Mashhoon.

Por último, para cerrar esta lista de simetrías, destacamos una particularidad de los fotones luminosos.
En la sección 7.2.2 visualizamos que el potencial espacial Ψ≈Φ era una posible explicación a la doble deflexión de los rayos luminosos. En el lenguaje de esta sección 10.5 diríamos que "su masa gravitatoria pasiva" es el doble que su masa aparente m=p/c (momento por unidad de velocidad).
¿Y qué hay sobre su masa gravitatoria activa?
Cualquier partícula que crea un potencial Φ'_g en su referencial solidario Σ', cuando se ve móvil con velocidad $v_o\hat{x}$ produce un potencial $\Phi_g = \gamma_o^2.(\Phi_g' + v_o^2/c^2.\Psi_g')$ en el nuevo referencial Σ. En el límite en que la partícula se transforma en un proyectil fotónico (ultra-liviano, ultra-rápido) con $v_o \to c$, la presencia del potencial Ψ' le asegura un factor efectivo de '2' en la generación de gravedad, lo que cuantificaría su "masa gravitatoria activa".

10.6 Ecuación de campo débil:

Ya tenemos el tensor de materia $T_{\alpha\beta}$, y estamos muy cerca de vincularlo con el tensor de curvatura $R_{\alpha\beta}$ a través de una ecuación tensorial (probablemente una relación de proporcionalidad).
Antes de zambullirnos en los cálculos matemáticos exactos (*que advertimos, ¡¡son muy complejos!!*) queremos aproximarnos a esa ecuación a partir de un conjunto de escenarios llamados de "*campo débil*" (en inglés *Weak Field*) donde los cálculos son menos complejos y hay menor riesgo de que los conceptos físicos queden enmascarados por mucha matemática.

Comenzamos por eliminar la tentación de plantear $[]^2 g_{\alpha\beta}=K.T_{\alpha\beta}$ como posible ecuación de campo, que es algo indeseado porque el operador $[]^2=\partial^\alpha\partial_\alpha$ no está basado en derivación covariante ∇_α. (A lo sumo puede aceptarse en coordenadas *cuasi-cartesianas*).
Basta analizar el caso particular $\alpha=0$ $\beta=0$ en ambas formulaciones, covariante y contravariante.
Para campos débiles la métrica es de diagonal dominante, entonces el tensor dual tiene en su diagonal los inversos del tensor métrico; en particular $g^{oo}\approx 1/g_{oo}$.

$g_{oo} = -1 + h_{oo}$ $\rightarrow []^2 g_{oo} = []^2 h_{oo}$
$-g_{oo} = 1 - h_{oo}$
$-g^{oo} \approx -1/g_{oo} = 1/(1-h_{oo})$
$-g^{oo} \approx (1-h_{oo}+h_{oo})/(1-h_{oo})$
$-g^{oo} \approx 1 + h_{oo}/(1-h_{oo})$ $\rightarrow []^2(-g^{oo})\approx 1/<1-h_{oo}>. []^2 h_{oo}$

Al ser $h_{oo}\ll 1$ aproximamos $1-h_{oo}\approx 1$ para quitarlo fuera del operador de derivadas de D'Alembert $[]^2$ y sustituirlo por su valor medio dentro de la región de análisis.

Las ecuaciones resaltadas en celeste y en verde muestran que los d'Alembertianos de g^{oo} y g_{oo} *tienen signo opuesto*. En estas circunstancias es imposible mapearlos respectivamente con T^{oo} y T_{oo} porque estos 2 últimos tienen el mismo signo, a lo sumo diferirán en factores γ.
Si queremos reutilizar todos los recursos matemáticos del Electromagnetismo sobre ecuación de Laplace y Poisson, separación de variables, armónicos cilíndricos, armónicos esféricos…etc, solo podremos aplicar las derivadas $[]^2$ sobre las perturbaciones $h_{\alpha\beta}$, no sobre la métrica completa $g_{\alpha\beta}$. Y deberemos restringirnos a los escenarios de campos débiles, donde el problema del signo desaparece porque:

$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$
$g^{\alpha\beta} \approx \eta^{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta}$

($h^{\alpha\beta}$ es el resultado de subir índices a $h_{\alpha\beta}$ con la métrica de Minkowski)
Serían $h_{\alpha\beta}$ y $h^{\alpha\beta}$ los candidatos a mapearse respectivamente contra $T_{\alpha\beta}$ y $T^{\alpha\beta}$ a través de un $[]^2$.

Aún así, tenemos el dilema de cómo modelar una dependencia con la velocidad, que fue insinuada por el principio de equivalencia en la sección 10.5 y que queda manifiesta en las transformaciones de Lorentz de 7.1 y 10.1 al partir de un referencial solidario a las masas.
Para el polvo tenemos $T^{\alpha\beta} = \rho_o.U^\alpha U^\beta$, que en el casillero $\alpha=0$ $\beta=0$ correspondiente a la energía vale
$T^{00} = \rho_o.U^0U^0 = \rho_o.(U^0U^0)= \rho_o.c^2\dot{t}^2$
El factor $\dot{t}^2$ es el γ^2 cinemático, podríamos pensar que este modelo ya contempla naturalmente el incremento gravitatorio de las masas móviles.

Sin embargo, los fluidos no acompañan este razonamiento. Recordamos las fórmulas del fluido de 10.2.2

$T^{\alpha\beta} = (\rho_o+p/c^2).U^\alpha U^\beta + p.g^{\alpha\beta}$ $\quad$ $T_{\alpha\beta} = (\rho_o+p/c^2).U_\alpha U_\beta + p.g_{\alpha\beta}$

En el caso extremo de la materia cuasiestática, la cuadrivelocidad de las masas tiene solo componente temporal y vale $U^\alpha=(U^o,0,0,0)$. El componente dominante del tensor es $T^{00} = (\rho_o+p/c^2).U^0U^0 + p.g^{00}$
Ejercicio: Utilizar la condición de normalización $U_\alpha U^\alpha= -c^2$ para demostrar $T^{00}= -\rho_o c^2 g^{00}$ y $T_{00}= -\rho_o c^2 g_{00}$.

Nuestra ecuación de campo actual con proporcionalidad directa h^{00} vs T^{00} modelaría correctamente el incremento de gravedad por materia presurizada, por ser $|g^{00}|>1$.

Pero fallaría al plantearse en la forma covariante, h_{oo} vs T_{oo}: al ser $|-g_{oo}|<1$, esto último estaría prediciendo que la gravedad generada es menor a la que correspondería a la densidad de masa propia ρ_o. Y la diferencia sería más pronunciada cuanto más presurizada (energizada) está la materia, al revés de lo que vislumbramos en el modelo del colchón del capítulo 7.4 y en los análisis de fuerzas 10.4.

En otro caso extremo en que la región del espaciotiempo es muy plana y la velocidad de las masas es relativamente alta, ahí el factor γ sería esencialmente el cinemático. Tendríamos $T_{00}=\rho_o c^2.\gamma^2$, lo que contemplaría el incremento gravitatorio esperado de la materia energizada respecto a la materia sin energizar. Pero este es un caso ideal poco realista.
En un caso intermedio, más realista, los factores 'γ' que afectan T_{oo} y T^{oo} contienen efectos cinemáticos y gravitacionales, dependen de la propia métrica que estamos intentando calcular.
Intentar resolver $[]^2h_{\alpha\beta} = K.T_{\alpha\beta}$ sería muy complicado si no desacoplamos las dependencias (es decir, si no eliminamos la métrica de las fuentes del lado derecho).
Ejercicio: Repasar las órbitas Keppler de un planeta (6.7.1), para el caso simple de órbita circular. Verificar que los efectos cinemáticos y los gravitacionales afectan de manera similar a la dilatación temporal.

10.6.1 Traza del tensor de energía-impulso:

Desacoplar las dependencias de la métrica es un recurso que nos libera del entrevero en el que peligrábamos meternos al final de la introducción 10.6.
La propuesta consiste, en una primera etapa, en erradicar del tensor de energía-impulso todos los factores 'γ' relativistas, tanto gravitatorios como cinemáticos. Una vez obtenida una primera versión de métrica, recién ahí podríamos aventurarnos a refinar los cálculos afectando los componentes del tensor.
Esta erradicación de factores γ es necesaria y también tiene validez conceptual. Desde el momento en que obtenemos $h^{\alpha\beta}$ y $T^{\alpha\beta}$ elevando índices con $\eta^{\alpha\beta}$ en vez de $g^{\alpha\beta}$, estamos implícitamente suponiendo unitarios los γ gravitatorios. Para mantener coherencia también debemos ignorar los cinemáticos.

Pero esa primera solución requiere una ecuación de campo mejor que la que propusimos en forma tentativa. Al considerar que todos los factores 'γ' valen ≈1, no aparecen ni en la versión covariante $[]^2h_{\alpha\beta}$ vs. $T_{\alpha\beta}$ ni en la versión contravariante $[]^2h^{\alpha\beta}$ vs. $T^{\alpha\beta}$. Desaparecieron del modelo.
Las presiones también desaparecen momentáneamente del análisis, porque recién podríamos estimarlas luego de conocer los potenciales Φ_g que producen la compensación de fuerzas "peso vs. ∇p".
En el caso particular en que la presión es poco significativa, tenemos:

$T^{\alpha\beta} \approx \rho_o.$

$$\begin{bmatrix} c^2 & c.u_x & c.u_y & c.u_z \\ u_x.c & u_x^2 & u_x.u_y & u_x.u_z \\ u_y.c & u_y.u_x & u_y^2 & u_y.u_z \\ u_z.c & u_z.u_x & u_z.u_y & u_z^2 \end{bmatrix}$$

$T_{\alpha\beta} \approx \rho_o.$

$$\begin{bmatrix} c^2 & -c.u_x & -c.u_y & -c.u_z \\ -u_x.c & u_x^2 & u_x.u_y & u_x.u_z \\ -u_y.c & u_y.u_x & u_y^2 & u_y.u_z \\ -u_z.c & u_z.u_x & u_z.u_y & u_z^2 \end{bmatrix}$$

Parece que el límite de los campos débiles nos está condenando a perder la dependencia con la velocidad, pero podemos incorporar esa dependencia al modelo gravitatorio si observamos que el módulo al cuadrado u^2 se obtiene sumando los elementos de la diagonal $u_x^2+u_y^2+u_z^2$
→ es decir, forma parte de la traza del tensor de energía-impulso.

Aunque no estamos considerando momentáneamente la presión, reconocemos que este tensor proviene de tomar el límite p→0 de las expresiones genéricas de 10.2.2:

$$T^{\alpha\beta} = (\rho_o+p/c^2).U^\alpha U^\beta + p.\eta^{\alpha\beta} \qquad T_{\alpha\beta} = (\rho_o+p/c^2).U_\alpha U_\beta + p.\eta_{\alpha\beta}$$

Si hubiera presiones también aparecerían en la diagonal, y su efecto gravitatorio se podría modelar a partir de la traza. Esta estrategia seguiremos al final de este capítulo, en la sección llamada "traza reversada".

10.6.2 Calibres gravitatorios ("*gauge*"):

En la búsqueda de una ecuación gravitatoria válida para campos débiles, debemos tener presente que *esta ecuación depende del calibre elegido*. Así como en el Electromagnetismo la ecuación de ondas desacoplada (Φ vs. ρ por un lado, $\vec{A}$ vs. $\vec{J}$ por otro lado) era válida solo en el calibre Lorenz.

En el Electromagnetismo aprendemos que los potenciales $\Phi,\vec{A}$ no tienen acción física inmediata. Son sus derivadas ($\vec{E}$, $\vec{B}$) las que se asocian a efectos físicos medibles, como la fuerza de Lorentz sobre una partícula cargada o la potencia transmitida a través del vector de Poynting $\vec{S}= \vec{E}\wedge \vec{B}/\mu_o$.
Tenemos lo que se llama "*libertad de calibre*" o "*gauge freedom*", que nos permite imponer o elegir cierta condición entre los potenciales, con tal de lograr algún objetivo: por ejemplo, una ecuación de ondas con la parte eléctrica desacoplada de la magnética.

En la Gravitación también vimos, por las analogías basadas en el Gravitoelectromagnetismo de 7.1, que algunos coeficientes de la perturbación métrica $h_{\alpha\beta}$ eran interpretables como potenciales Φ_g y $\vec{A_g}$.
¿Pero cuándo hicimos una elección de calibre? La hicimos sin darnos cuenta, repasemos los eventos.
Por un lado, en 7.1.2 elegimos $\nabla\cdot\vec{A_g} + 1/c^2.\partial_t\Phi_g =0$ como forma de desacoplar el potencial escalar del vectorial y llegar a ecuaciones de ondas con operador d'Alembertiano.
Luego en 7.1.3. partimos de $-g_{oo}=1+2.\Phi_g/c^2$ y agregamos $\vec{A_g}$ a los casilleros espacio-tiempo de la métrica.
Finalmente, en 10.1 relacionamos potenciales y flujos a través de una ecuación de Laplace/Poisson.

O sea que sin darnos cuenta ya estamos atados a una cierta *norma* o calibre.
Un calibre en el cual valen las relaciones $-g_{oo}=1+2.\Phi_g/c^2$, $[]^2\ h_{oo}=-8\pi G\rho_m/c^2$ y las interpretaciones gravitomagnéticas. No es el único calibre posible, como veremos a continuación en diferentes ejemplos.

10.6.3 Rindler cuadrático y lineal:

En la métrica Rindler tenemos $-g_{oo}=(X/X_H)^2$.
Para que quede claro que estamos operando en un entorno "Weak Field", pensamos que X es de la forma $X=X_H+h$ con $|h|\ll X_H$. La métrica es exactamente cartesiana en la parte espacial y tiene en la parte temporal un apartamiento "infinitesimal" respecto al valor $g_{oo} = -1$ de Minkowski.
A pesar de la ausencia de masa $\rho=0$, el laplaciano de la perturbación h_{oo} es no nulo (resultado ya analizado en 7.1.4 y en 9.5.1). Esto no es malo en sí mismo y no invalida el uso de las coordenadas Rindler, simplemente es un indicador de que estamos en otro calibre diferente del que venimos utilizando implícitamente a lo largo de este capítulo 10.

La versión linealizada de Rindler queda $(dS)^2 = -(U/U_H).(c.dT)^2 + (U_H/U).dU^2 + dY^2 + dZ^2$.
Ahora el potencial temporal presente en h_{oo} varía con la primera potencia de 'U' y tiene laplaciano cero, lo que lleva a pensar que pasamos a un calibre más compatible con el que estamos acostumbrados a trabajar, que se manifiesta con un potencial temporal armónico en regiones vacías.
Aunque aparece un potencial espacial h_{UU} que varía con la potencia inversa 1/U y no es armónico.

¿Cómo se cambia de un calibre a otro?
Si nos guiamos por el ejemplo de Rindler, el cambio presentado en 7.2.1 es $(X/X_H)^2=U/U_H$.
Operamos con pequeños apartamientos $X=X_H+h$, $U=U_H+u$.

$(X/X_H)^2=U/U_H$
$(1+h/X_H)^2=1+u/U_H$.
$1+ 2h/X_H +h^2/X_H^2=1+u/U_H$.
$2h/X_H +h^2/X_H^2=u/U_H$ →sustituimos la relación $X_H=2U_H$ vista en 7.2.1
$u = h + h^2/(2.X_H)$

Lo que tenemos aquí es un desplazamiento infinitesimal, característico de las transformaciones de calibre.
En la Gravitación, elegir un calibre no significa inventar coeficientes métricos de buenas a primeras.

Significa realizar un cambio de coordenadas *muy poco invasivo*, cambiar a otro conjunto de coordenadas esencialmente iguales a las anteriores pero desplazadas infinitesimalmente.
Seguimos en coordenadas "cuasi-cartesianas", no pasamos a esféricas ni a cilíndricas.
El desplazamiento infinitesimal de coordenadas produce, como es de esperar, un cambio infinitesimal en los coeficientes métricos. Pero como estamos en entornos W.F.L, estos coeficientes $h_{\alpha\beta}$ *ya son una perturbación infinitesimal* respecto a la métrica Minkowski, y el cambio de calibre representa una variación que puede ser del mismo orden de magnitud.
Veremos más ejemplos.

10.6.4 Calibre isócrono y calibre inercial:

Consideramos una métrica descrita como $(dS)^2 = -(c.dt)^2.[1+2\Phi(z)/c^2] + dx^2+dy^2+dz^2$.
No importa si representa un espaciotiempo físico real, solo es un ejemplo para ilustrar los conceptos.
Suponemos $|\Phi| \ll c^2$ para no salirnos de las hipótesis de "campo débil", y orientamos el eje-z de acuerdo a la gravedad local, para simplificar los cálculos.
No es difícil hacer desaparecer el término temporal de la métrica y pasar a un nuevo calibre donde $h'_{oo} \approx 0$ y donde la coordenada temporal t' mide tiempo propio de un observador en reposo (de ahí el nombre isócrono).
Una posible transformación de desplazamiento es: $t = t' - \Phi/c^2.t'$, califica como desplazamiento infinitesimal para un rango de valores chicos de las coordenadas temporales.

$t = t' - \Phi/c^2.t'$ →diferenciamos
$dt = dt'.(1-\Phi/c^2) + t'.\partial_z\Phi.dz$
$dt^2 = dt'^2.(1-\Phi/c^2)^2 + 2.t'.\partial_z\Phi.(1-\Phi/c^2).dz.dt' + t'^2.(\partial_z\Phi)^2.dz^2$
$dt^2 \approx dt'^2.(1-2\Phi/c^2)$ + extras

En la métrica expandida $(d\tau)^2$, el primer sumando $(dt)^2.[1+2\Phi(z)/c^2]$ aporta un término temporal:
$dt'^2.(1-2\Phi/c^2).(1+2\Phi/c^2) \approx dt'^2$
La dilatación temporal pasa a ser un residuo del orden de Φ^2/c^4, totalmente infinitesimal para lo que es la precisión requerida. A efectos prácticos se considera que pasamos a un calibre isócrono.
Esta misma transformación de isocronía la podemos realizar en el interior de un astro masivo, y aunque anulemos h'_{oo} no podemos anular la masa y energía presentes en T'_{oo} →está claro que este calibre no es compatible con la ecuación a la que estamos habituados $[]^2\ h_{oo}$ vs T'_{oo}, así que no hay ninguna perspectiva de extenderla a los demás índices $h_{\alpha\beta}$.

Ejercicio: Calcular en esta norma isócrona una caída libre partiendo del reposo y confirmar que da igual que en el calibre anterior. La aceleración que antes proporcionaba $-\nabla\Phi_g$ ahora la suministra $-\partial A'_g{}^{\rightarrow}/\partial t'$, el otro componente del campo gravitatorio $E_g{}^{\rightarrow}$.
Esto ilustra que las derivadas de la perturbación tienen más significado que las propias perturbaciones, en este caso se asocian a aceleraciones y fuerzas.

Sin embargo, también podemos realizar un cambio de calibre que nos lleve a otras coordenadas donde NO HAY ACELERACIÓN GRAVITATORIA. Es lo que sería un sistema localmente inercial.
Pensemos en una transformación de aceleración simple, sin entrar en detalles sobre factores γ de Lorentz o funciones hiperbólicas sh() ch() de Rindler.

$x \approx x' + \frac{1}{2}.g_x.t'^2$
$y \approx y' + \frac{1}{2}.g_y.t'^2$
$z \approx z' + \frac{1}{2}.g_z.t'^2$

Un observador en caída libre con aceleración $g^{\rightarrow}=(g_x, g_y, g_z)$ tendría constantes sus nuevas coordenadas x',y',z'. Para valores chicos del tiempo t' esta transformación ciertamente califica como un "desplazamiento infinitesimal" y puede describirse como "transformación de calibre".
En el nuevo referencial todos los coeficientes $h_{\alpha\beta}$ se anulan en un punto. Y si el referencial es genuinamente inercial, se anulan también en ese punto todas las derivadas de la métrica y todos los Christoffels. No se siente la aceleración gravitatoria, se eliminó mediante la caída libre.

Así como la aceleración gravitatoria se puede ocultar mediante una caída libre, también se puede *inventar* o simular mediante motores acelerados o mediante giros (Principio de Equivalencia).
O sea que la esencia del espaciotiempo *no está ni en los $h_{\alpha\beta}$ ni en sus primeras derivadas, está en sus derivadas segundas*. Vamos bien rumbeados al utilizar el laplaciano, pero en general no alcanza con el laplaciano y se precisan combinaciones de derivadas segundas de mayor complejidad.
Lo que NO PUEDE anularse por ninguna caída libre ni elección de calibre son la deriva geodésica y las fuerzas de marea, que se cuantifican con el **tensor de Riemann**. Esa es la esencia del espaciotiempo, la propiedad que lo define (al menos localmente) y que debería trascender las coordenadas.
Demostraremos en el capítulo 11 que el tensor de Riemann conserva intactas sus 256 componentes durante una transformación de calibre (salvo alguna pequeña variación infinitesimal de 2do orden en $|h_{\alpha\beta}|$ que cae fuera de la escala de precisión del escenario W.F.L estudiado).

10.6.5 Gullstrand-Painlevé y Schwarzschild:

En la sección 7.2.4 presentábamos la métrica Gullstrand-Painlevé $(dS)^2 = -(c.dT)^2+[dr+v(r).dT]^2+r^2.d\Omega^2$
Independientemente de que sea o no una solución válida, trataremos de aproximarla en un entorno W.F.L en coordenadas "cuasi-cartesianas". Eso implica alejarnos de la masa atractora hasta tener $v(r) \ll c$.

$(dS)^2 = -(c.dT)^2+[dr+v(r).dT]^2+r^2.d\Omega^2$ →expandimos cuadrado
$(dS)^2 = -(c.dT)^2(1-v^2/c^2) + 2.v.dr.dT + dr^2+r^2.d\Omega^2$

El pasaje entre coordenadas "cuasi-esféricas" y "cuasi-cartesianas" es:

$x=r.sen\theta.cos\varphi$, $y=r.sen\theta.sen\varphi$, $z=r.cos\theta$
$r^2=x^2+y^2+z^2$, $dr^2+r^2.d\Omega^2 = dx^2+dy^2+dz^2$
derivamos: $r.dr = x.dx + y.dy + z.dz$

La métrica resulta:
$(dS)^2 = -(c.dT)^2(1-v^2/c^2) + 2.v.dT.(xdx+ydy+zdz)/r + dx^2+dy^2+dz^2$

Visualizamos en forma matricial el tensor métrico:

$g_{\alpha\beta} \approx$

$$\begin{bmatrix} -1+v^2/c^2 & (v/c).(x/r) & (v/c).(y/r) & (v/c).(z/r) \\ (v/c).(x/r) & 1 & 0 & 0 \\ (v/c).(y/r) & 0 & 1 & 0 \\ (v/c).(z/r) & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Encontramos poblados los casilleros mixtos con algo que solemos interpretar como potenciales gravitomagnéticos. Parece evidente que estamos en un calibre diferente al habitual, porque la distribución de materia es estática y no puede haber flujos de materia.
Recordamos que las coordenadas Gullstrand-Painlevé están inspiradas en un viajero en caída libre radial. Este hipotético viajero, cuando en su descenso pasa cerca de las porciones de materia que forman el astro generador de gravedad, las "ve" ascendiendo con velocidad v(r).
Con gran esfuerzo de abstracción podríamos imaginar una relación de causa-efecto entre estos flujos aparentes de materia y los coeficientes métricos. Pero al alejarnos de la masa y recorrer el vacío exterior, encontramos que estos coeficientes decaen como $1/\sqrt{r}$, no son las soluciones esperadas de una ecuación diferencial de Laplace/Poisson (que deberían tener decaimiento armónico 1/r).
Nuevamente concluimos que estamos en una norma o calibre diferente.

El cambio entre Schwarzschild y Gullstrand-Painlevé supone una transformación de coordenadas como la vista en 7.2.4 $c.dt = c.dT - v/c.dr/(1-v^2/c^2)$.
Si nos restringimos a una región pequeña y a bajas velocidades ($v \ll c$, $dr/dT \ll c$), este cambio de variables resulta un desplazamiento infinitesimal y califica como transformación de calibre válida.
La métrica en las nuevas coordenadas resulta:

$(dS)^2 = -(c.dt)^2(1-r_s/r) + dr^2/(1-r_s/r) + r^2.d\Omega^2$ →aproximamos para $r_s \ll r$
$(dS)^2 \approx -(c.dt)^2(1-r_s/r) + dr^2.(1+r_s/r) + r^2.d\Omega^2$
$(dS)^2 \approx -(c.dt)^2(1-r_s/r) + dr^2.r_s/r + dr^2 + r^2.d\Omega^2$ →reconocemos parte euclídea
$(dS)^2 \approx -(c.dt)^2(1-r_s/r) + dr^2.r_s/r + dx^2 + dy^2 + dz^2$

$\rightarrow (dS)^2 \approx -(c.dt)^2(1-r_s/r) + dr^2.r_s/r + dx^2 + dy^2 + dz^2$ → sustituimos $r.dr = x.dx + y.dy + z.dz$

La visualización matricial es la siguiente:

$g_{\alpha\beta} \approx$

[	$-1+r_s/r$	0	0	0]
[	0	$1+r_s.x^2/r^3$	$r_s.xy/r^3$	$r_s.xz/r^3$]
[	0	$r_s.yx/r^3$	$1+r_s.y^2/r^3$	$r_s.yz/r^3$]
[	0	$r_s.zx/r^3$	$r_s.zy/r^3$	$1+r_s.z^2/r^3$]

Lo que tenemos ahora es una abundancia de perturbaciones espacio-espacio, y no se vislumbra la simetría esférica que sería esperable para la geometría estudiada (parece haber tres ejes privilegiados $\vec{x}$ $\vec{y}$ $\vec{z}$).
De acuerdo con todos los desarrollos realizados en este capítulo 10, esperamos encontrar astros masivos con un tensor de energía-impulso diagonal. Está claro que la ley de construcción del coeficiente hxy dentro de este calibre no puede involucrar únicamente a la tensión Txy; se precisa una regla más amplia en la cual todos los coeficientes Tij puedan potencialmente contribuir a la generación de cada perturbación $h_{\alpha\beta}$. Es decir, algo que en otras ocasiones describimos como "mezcla de efectos" o "efectos cruzados".
Por otro lado, desaparecieron los coeficientes gravitomagnéticos. Y los coeficientes métricos espaciales decaen como ~1/r al alejarnos de la masa. A pesar de que no son armónicos, estamos más cerca de un escenario en el que la ecuación de campo tenga una forma similar a la de Laplace/Poisson.

Ya que no estamos en el calibre esperado, podríamos preguntarnos ¿en qué calibre estamos ubicados?
Si hay que ponerle un nombre podríamos llamarlo "calibre de traza nula" ("*traceless*" en inglés).
Ejercicio: calcular la traza de la perturbación h= –hoo+hxx+hyy+hzz y demostrar que es cero.
Ejercicio (advertencia: muy trabajoso!!): repasar la sección 9.6.4 donde veíamos que el tensor de Ricci tiene 4 contribuciones en el régimen W.F.L. La elección de calibre h=0 reduce el Ricci a solo 3 términos, y sugerimos como ejercicio demostrar que la métrica de Schwarzschild en coordenadas cartesianas es solución de Ricci nulo para calibre "traceless".

10.6.6 Calibre Coulomb y calibre isotrópico:

¿Cuál es realmente el calibre compatible con este capítulo 10? ¿Qué nombre le podemos poner?
En la base de la elección de calibre está la relación propuesta en 7.1.2 $\nabla \cdot \vec{A_g} + 1/c^2 \partial_t.\Phi_g=0$, que se puede interpretar como "cuadridivergencia nula en la primera columna" $\partial_\alpha h^{\alpha 0} = 0$.

$h^{\alpha\beta} = -2/c^2$ *

[	Φ_g	$c.A_{gx}$	$c.A_{gy}$	$c.A_{gz}$]
[	$c.A_{gx}$	0?	0?	0?]
[	$c.A_{gy}$	0?	0?	0?]
[	$c.A_{gz}$	0?	0?	0?]

En 9.6.4 mencionábamos un calibre llamado informalmente "calibre Coulomb" y lo formulábamos como $\partial_\alpha h^{\alpha\beta} = 0$. Parece compatible con el nuestro y resulta una expresión tensorial que involucra a todos los índices, en este caso incluye a los β=1,2,3 espaciales además del β=0 temporal. Comentario: consideramos que formular relaciones sobre tensores completos es una buena práctica que nos va a guiar en el camino hacia ecuaciones generales que resistan cambios de coordenadas.

En este capítulo 10 hicimos muchas veces la suposición de que estamos identificando al tensor de energía-impulso como el laplaciano (o d'Alembertiano) de las perturbaciones.

$T^\alpha{}_\beta = 1/K \,.\, []^2\, h^\alpha{}_\beta$ →tomamos divergencia
$\partial_\alpha T^\alpha{}_\beta = 1/K \,.\, \partial_\alpha\, []^2\, h^\alpha{}_\beta$ →intercambiamos orden de derivación
$\partial_\alpha T^\alpha{}_\beta = 1/K \,.\, []^2\, \partial_\alpha\, h^\alpha{}_\beta$

Parecería que la elección del calibre de Coulomb nos asegura en forma inmediata un tensor de materia con divergencia nula $\partial_\alpha T^\alpha{}_\beta=0$, compatible con la conservación de flujos energéticos y con los balances de fuerza. Sin embargo, falta todavía un poco de camino por recorrer.
Pensemos cuáles podrían ser las soluciones de vacío ($h_{\alpha\beta}$ armónicos) compatibles con esta norma de Coulomb. Probemos un doble gradiente $h_{ij}=\partial_i\partial_j f$.

La condición armónica que buscamos (laplaciano nulo) es:

$[]^2 h_{ij}=0$ →sustituimos

$[]^2 \partial_i \partial_j f=0$ →intercambiamos orden de derivación

$\partial_i \partial_j \, []^2 f = 0$ →cualquier función f(x,y,z) armónica serviría

Seguimos operando:

$h_{ij}=\partial_i \partial_j f$ →subimos índice 'i'

$h^i{}_j=\partial^i \partial_j f$ →tomamos divergencia

$\partial_i h^i{}_j=\partial_i \partial^i \partial_j f$ →reconocemos d'Alembertiano

$\partial_i h^i{}_j=[]^2 \partial_j f$ →intercambiamos orden de derivación

$\partial_i h^i{}_j=\partial_j \, []^2 f$ →buscamos divergencia nula para compatibilidad con el calibre

Nuevamente nos da que cualquier función armónica es adecuada, y elegimos el armónico esférico más simple compatible con la simetría esférica f=1/r → La métrica queda entonces $h_{ij}=\partial_i \partial_j (1/r)$.
Sin entrar demasiado en los cálculos matemáticos (se pueden comprobar con ayuda del software Maxima), diremos simplemente que estas funciones tienen un decaimiento espacial como $1/r^3$ en el vacío; no parecen ser soluciones tipo Poisson construidas en base a presiones o densidades de masa ubicadas dentro del tensor de energía-impulso en la región del astro masivo.
Nadie nos prohíbe utilizar la condición de Coulomb, pero debemos tener presente que la ecuación de campo en este calibre no puede ser la conjeturada al inicio de este capítulo.

Trataremos de llegar a una métrica puramente diagonal, partiendo de la forma Schwarzschild.

$(dS)^2 \approx -(c.dt)^2(1-r_s/r) + dr^2.(1+r_s/r) + r^2.d\Omega^2$

Probamos un desplazamiento infinitesimal $r=\rho + \xi$ con $|\xi| \ll \rho$.

$dr = d\rho$, $dr^2=d\rho^2$

$r^2=\rho^2+2.\rho.\xi +\xi^2$ →descartamos infinitésimo ξ^2

$r^2 \approx \rho^2+2.\rho.\xi$

$r^2 \approx \rho^2(1+2\xi/\rho)$

Sustituimos en la métrica, conservando solo los términos de orden r_s/ρ:

$(dS)^2 \approx -(c.dt)^2(1-r_s/\rho) + d\rho^2.(1+r_s/\rho) + \rho^2.(1+2\xi/\rho).d\Omega^2$

El ajuste $\xi=r_s/2$ nos permite sacar de factor común la métrica euclídea $(1+2\xi/\rho)=(1+r_s/\rho)$

$(dS)^2 \approx -(c.dt)^2(1-r_s/\rho) + (1+r_s/\rho)(d\rho^2 + \rho^2.d\Omega^2)$

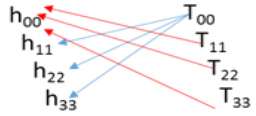
$(dS)^2 \approx -(c.dt)^2(1-r_s/\rho) + (1+r_s/\rho)(dx^2+dy^2+dz^2)$

El tensor métrico queda finalmente diagonal, con todos sus coeficientes armónicos y con simetría esférica:

$g_{\alpha\beta} \approx$

```
[-1+rs/ρ      0           0           0          ]
[0            1+rs/ρ      0           0          ]
[0            0           1+rs/ρ      0          ]
[0            0           0           1+rs/ρ     ]
```

Esta norma o calibre es compatible con perturbaciones armónicas en vacío.
Y la ley de generación de perturbaciones a partir de las fuentes es casi directa $h^{\alpha\beta}$ vs. $T^{\alpha\beta}$.
La única "mezcla de efectos" que se está requiriendo es a través de la diagonal: los coeficientes T_{xx},T_{yy},T_{zz} están actuando sobre h_{oo}, al igual que T_{oo} está influyendo en h_{xx},h_{yy},h_{zz}. Repetimos la figura 10.4.1:

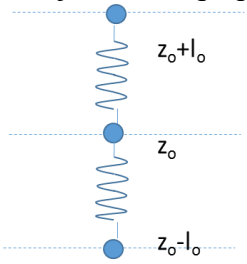


Ejercicio: Demostrar que todos los coeficientes $h_{\alpha\beta}$ $\forall_\alpha \forall_\beta$ verifican la condición de Lorenz gravitatoria enunciada en 9.6.5 $\partial_\lambda h^\lambda{}_\alpha = \frac{1}{2}.\partial_\alpha h$ (la versión W.F.L de la condición armónica de De Donder).

10.6.7 Mezcla de efectos:

¿Cómo podemos visualizar el hecho de que las masas ρ, ubicadas en el casillero temporal T_{oo}, puedan estar condicionando las perturbaciones métricas espaciales h_{xx}, h_{yy}, h_{zz}?

Pensemos en un astro masivo formado por un material sólido clasificado como "incompresible" desde el punto de vista clásico. Modelamos su estructura interna en forma similar al colchón elástico utilizado en la sección 7.4.2: centros de masa m_o separados una distancia l_o y unidos por enlaces semirígidos de constante elástica k_o.
Incompresible significa que en nuestras coordenadas los centros de masa están equiespaciados, sea cual sea el grado de presurización. Eso es simplemente un artificio matemático para reducir la complejidad de los cálculos. Pero NO PUEDE significar que la constante elástica del material es infinita, suponer eso permitiría transmisión de información a velocidad superlumínica y comprometería la causalidad relativista.
Se requiere una mínima compresibilidad de acuerdo con la fórmula 7.4.3 $m_o.c^2 = (k_o.l_o^2)$ $v_p=c$.
Llamamos $\vec{z}$ al eje coordenado donde apunta localmente la gravedad, en el interior del astro masivo, y dibujamos una pequeña región a la cual le aplicamos un balance de fuerzas.



En la sección 7.4.2 distinguíamos dos conjuntos de coordenadas:

$\{x_o,y_o,z_o\}$ = coordenadas sin desplazar
$\{x,y,z\}$ = coordenadas desplazadas

Relacionadas a través de las fórmulas:

$$x = x_o + \delta_X$$
$$y = y_o + \delta_Y$$
$$z = z_o + \delta_Z$$

Ahora podemos ponerle un nombre a estas fórmulas de transformación: se trata de una transformación de calibre, un desplazamiento infinitesimal ($|\delta z| \ll z$). Las coordenadas sin desplazar son las que estamos utilizando implícitamente cuando suponemos que el sólido es incompresible. Mientras que las coordenadas desplazadas modelan el hecho de que los centros de masa están levemente corridos respecto a su posición de equilibrio, por acción de los esfuerzos internos (fundamentalmente presiones).

Las masas distorsionan el espacio:
Para analizar este primer efecto cruzado, realizamos un balance de fuerza como el realizado en el colchón de resortes de 7.4.2, y relacionamos la longitud $\ell(z)$ entre dos centros de masa en función de la deformación unitaria $\partial\delta z/\partial z_o$: $\ell(z) = l_o\,(1+ \partial\delta z/\partial z_o)$
La deformación unitaria o gradiente de desplazamiento es:

$\partial\delta z/\partial z_o = \Delta l/l_o$ → $\Delta l = F/k_o$ fuerza elástica
$\partial\delta z/\partial z_o = F/k_o/l_o$
$\partial\delta z/\partial z_o = F/(k_o.l_o)$ → presión=fuerza/superficie, la superficie de acción es l_o^2.
el signo negativo contempla que produce compresión, acortamiento
$\partial\delta z/\partial z_o = -p.l_o^2/(k_o.l_o)$ → multiplicamos por l_o
$\partial\delta z/\partial z_o = -p.l_o^3/(k_o.l_o^2)$ → reconocemos velocidad máxima de propagación 7.4.3
$\partial\delta z/\partial z_o = -p.l_o^3/(m_o.c^2)$
$\partial\delta z/\partial z_o = -p.l_o^3/(m_o.c^2)$ → densidad ρ = masa m_o ocupando un volumen l_o^3.
$\partial\delta z/\partial z_o = -p/(\rho.c^2)$

$\partial\delta z/\partial z_o = -p/(\rho.c^2)$

Tomamos diferenciales a la transformación de calibre, nos concentramos en la ecuación-z que es la que más nos interesa porque apunta según la gravedad local.

$z = z_o + \delta z$ →diferenciamos ignorando variaciones transversales en 'x','y'
$dz = dz_o + dz_o.\partial\delta z/\partial z_o$
$dz = dz_o(1+\partial\delta z/\partial z_o)$ →sustituimos en función de la presión
$dz = dz_o.(1 -p/(\rho.c^2))$ →elevamos al cuadrado, con simplificación de $p \ll \rho.c^2$
$dz^2 \approx dz_o^2.[1 -2p/(\rho.c^2)]$

Esto da una pista sobre lo que debería aparecer en la expansión métrica multiplicando a los diferenciales dz_o^2. La transformación de calibre que mencionamos es solo un recurso intermedio, auxiliar.
Nadie nos obliga a pasar realmente a las coordenadas desplazadas (x,y,z); perfectamente podemos quedarnos en las coordenadas (x_o,y_o,z_o) sin desplazar. Pero algo en la métrica tiene que reflejar el hecho de que los diferenciales de coordenadas dx_o, dy_o, dz_o no son distancias reales.

También hay un detalle sutil que sugiere que los diferenciales de las coordenadas desplazadas dx,dy,dz tampoco son estrictamente distancias métricas reales, porque si lo fueran nos aparecería en las coordenadas sin desplazar una perturbación h_{zz} negativa. La norma o calibre en que estamos operando construye las perturbaciones a partir de masas o esfuerzos de $T^{\alpha\beta}$, que en la diagonal son todos positivos.
La propuesta de métrica para el interior del astro masivo, llena de imprecisiones porque solo nos interesa marcar el orden de magnitud, sería algo de este estilo:
$dS^2 \approx -(c.dt)^2.(1+2.\Phi_g/c) + dx_o^2 + dy_o^2 + dz_o^2.[1+2.(p_{max}-p)/(\rho.c^2)]$

Esto vale para el interior del astro presurizado. En la frontera de separación p=0, y el valor de los coeficientes métricos debe unirse en forma suave sin discontinuidad con la métrica externa.
En 10.2.3 vimos que p_{max} era del orden de $r_s/4R_a$, esto nos alcanza para sostener el argumento de que la perturbación espacial debe ser del mismo orden de magnitud que la temporal (obedeciendo a una ecuación de campo que todavía no formulamos) y no inferior por un factor $p/(\rho c^2)$.

La presión distorsiona el tiempo:
El mismo modelo de colchón ayuda a visualizar el otro "efecto cruzado".
Aunque utilicemos coordenadas sin desplazar para modelar a un sólido como incompresible, podemos suponer que la gravedad será generada en proporción a la densidad efectiva (aumentada por la leve presurización) y no por la densidad base en ausencia de esfuerzos.

ρ_{eff} = masa/volumen-comprimido →la celda elemental es un cubo de lado $l_o - \Delta l$
$\rho_{eff} = m_o/(l_o - \Delta l)^3$
$\rho_{eff} = m_o/l_o^3/(1 - \Delta l/l_o)^3$ →aprox $\Delta l \ll l_o$
$\rho_{eff} \approx m_o/l_o^3/(1 - 3\Delta l/l_o)$ →Taylor $(1-h)^{-1} \approx 1+h$
$\rho_{eff} \approx m_o/l_o^3.(1 + 3\Delta l/l_o)$
$\rho_{eff} \approx m_o/l_o^3 + 3m_o\Delta l/l_o^4$
$\rho_{eff} \approx \rho + 3m_o\Delta l/l_o^4$
$\rho_{eff} \approx \rho + 3m_o\Delta l/l_o^4$ →multiplicamos por (k_o/k_o)
$\rho_{eff} \approx \rho + 3m_o k_o\Delta l/(k_o l_o^4)$ →fuerza
$\rho_{eff} \approx \rho + 3m_o F/l_o^2/(k_o l_o^2)$
$\rho_{eff} \approx \rho + 3m_o F/l_o^2/(k_o l_o^2)$ →presión
$\rho_{eff} \approx \rho + 3m_o p/(k_o l_o^2)$
$\rho_{eff} \approx \rho + 3m_o p/(k_o l_o^2)$ →velocidad de propagación
$\rho_{eff} \approx \rho + 3p/(c^2)$
$\rho_{eff} \approx \rho + 3p/c^2$ → masa efectiva causante de gravedad

10.7 Métrica con traza reversada:

Los desarrollos y resultados que presentamos a continuación pueden encontrarse en los textos en inglés con el nombre de "*trace-reversed metric*".
Mostraremos que este modelo ofrece una relación causa-efecto compatible con la hipótesis $\Psi \approx \Phi$ y permite contemplar los efectos gravitatorios/gravitomagnéticos de las masas en movimiento, y también de la presión.

En la sección 10.6 exploramos distintos calibres y concluimos que el Lorenz (isotrópico) tenía varias propiedades prometedoras:

- compatible con la analogía gravitomagnética y con las fórmulas diagonales del tensor de materia vistas a lo largo del capítulo 10.
- Métrica diagonal (pocos coeficientes a calcular) que respeta la simetría esférica en los alrededores de una masa esférica.
- Coeficientes métricos armónicos en vacío, compatibles con una ecuación de campo $[]^2 h_{\alpha\beta}=K.T_{\alpha\beta}$ para $\alpha \neq \beta$ (fuera de la diagonal).
- Si bien presenta "mezcla de efectos", es la mezcla menos invasiva de todas las que encontramos porque únicamente se restringe a la diagonal de los tensores involucrados $h_{\alpha\beta}$ $T_{\alpha\beta}$.

Como anticipábamos al inicio del capítulo 10.6, la dependencia con la velocidad al cuadrado (y también con la presión) puede obtenerse haciendo aparecer en la ecuación de campo la traza del tensor de energía impulso. Lo cual representa una mezcla "*natural*" porque contiene la suma de todos los elementos, igual que el laplaciano relativista de 9.5 ofrecía una oportunidad de mezcla a través del determinante métrico 'g' (producto de los elementos de la diagonal cuando la métrica es diagonal).

Nos inspiramos en un recurso que ya nos apareció varias veces a lo largo de este trabajo: construir un tensor sumando o restando la métrica o la matriz identidad modulada por un escalar:

Tensor de inercia en un rígido	8.4.1	$[I]= \Sigma_n m_n.(r_n^2[Ident]- \vec{r_n} \otimes \vec{r_n})$
Tensor de momento de cuadrupolo	8.4.2	$[Quad]=\Sigma_n q_n.(3.\vec{r_n} \otimes \vec{r_n} - r_n^2[Ident])/2$
Fluido con presión	10.2	$(\rho+p/c^2)U^\alpha U_\beta+p.g^\alpha{}_\beta$.
Tensor de energía-impulso electromagnético	10.3:	$Y^\alpha{}_\beta - Y/4.g^\alpha{}_\beta$.

Proponemos la siguiente modificación a la ecuaciones de campo para bajas energías:

$[]^2 h^{\alpha\beta} \approx K.[T^{\alpha\beta} - f.T.\eta^{\alpha\beta}]$	en versión contravariante
$[]^2 h_{\alpha\beta} \approx K.[T_{\alpha\beta} - f.T.\eta_{\alpha\beta}]$	en versión covariante
$[]^2 h^\alpha{}_\beta \approx K.[T^\alpha{}_\beta - f.T.\eta^\alpha{}_\beta]$	en versión mixta ($g^\alpha{}_\beta=\eta^\alpha{}_\beta$ es la matriz identidad)

Los factores 'K' y 'f' los debemos ajustar para alinearnos con casos particulares conocidos.

La traza de un tensor es un invariante escalar que se obtiene en 2 pasos:

- Primero bajar o subir uno de los índices hasta que quede una magnitud de varianza mixta:
  en este caso $T^\alpha{}_\lambda = T^{\alpha\beta}.\eta_{\beta\lambda}$. Podría ser también $T_\alpha{}^\lambda = T_{\alpha\beta}.\eta^{\beta\lambda}$.
- Segundo: contraer $\lambda=\alpha$ $T=T^\alpha{}_\alpha$=suma de los elementos de la diagonal

Para métricas simples como la de Minkowski con signatura (-,+,+,+), ambos pasos se pueden resumir de la siguiente manera: traza $T^\alpha{}_\alpha = -T^{00}+T^{11}+T^{22}+T^{33}$
Caso particular $tr(\eta^{\alpha\beta})= -\eta_{00}+\eta_{11}+\eta_{22}+\eta_{33} = -(-1) +1 +1 +1 = 4$

10.7.1 Masas móviles:

Comenzamos analizando el escenario en el que las masas generadoras de la gravedad se mueven, y trataremos de calibrar los parámetros K,f para lograr la dependencia γ^2 conjeturada en 10.4.5 y 10.5, aunque dejando abierta la posibilidad de que el factor efectivo tenga un valor comprendido entre γ^1 y γ^2, o incluso mayor.
Las ecuaciones de campo propuestas son, para $\alpha=0$ $\beta=0$:

$$[]^2 h_{00} = K.[T_{00} - f.T.\eta_{00}]$$

Sustituimos:

$\eta_{00} = -1$

$T_{00} = \rho_o.c^2$

$T = \rho_o.(-c^2 + u_x^2+u_y^2+u_z^2) = \rho_o.(-c^2 + u^2)$

Operamos:

$[]^2h_{00} = K.[\rho_o.c^2 + f.\rho_o.(-c^2 + u^2)]$

$[]^2h_{00} = K.\rho_o.[\ c^2 + f.(-c^2 + u^2)]$

$[]^2h_{00} = K.\rho_o.[\ (1-f).c^2 + f.u^2\ ]$

$[]^2h_{00} = K.\rho_o.(1-f).c^2[\ 1+f/(1-f).u^2/c^2]$

Llamamos 'k' al factor adimensionado que modela la masa gravitatoria activa que presenta la energía respecto a su masa equivalente E/c^2. En la sección 10.5 veíamos ejemplos:

- Una masa móvil M, vista desde el plano ecuatorial de su eje de movimiento, presenta un incremento de masa total por factor $\gamma^2 \approx (1+u^2/c^2)$. La contribución de la energía es con $2.\Delta m$, o sea k=2.
- Cuando la masa es observada desde el eje polar de su flujo, el incremento de masa total es por factor $\gamma^1 \approx (1+ \frac{1}{2}\ .u^2/c^2)$. La contribución de la energía cinética es con $1.\Delta m$, es decir, k=1.
- La fórmula genérica es un factor $(1+ k/2.u^2/c^2)$

En la ecuación de campo que estamos proponiendo identificamos $f/(1-f)=k/2$

Despejamos $2f=k.(1-f)$ ….cuentas… → $f=k/(k+2)$ EC-1

Los órdenes de magnitud en los que esperamos encontrarnos son:

- k=1 (para casos como el del eje polar) →f=1/3
- k=2 (para casos como el del plano ecuatorial) →f=1/2

10.7.2 Masas en reposo:

Repetimos un análisis similar aplicado a un escenario simplificado de masas estáticas, donde el tensor de energía-impulso solo tiene un casillero dominante $T_{oo}=\rho_o.c^2$ (ignoramos por ahora la presión).

La métrica es únicamente diagonal, con isotropía espacial.

$[]^2h_{ii} = K.[T_{ii} - f.T.\eta_{ii}]$ para i=1,2,3

Sustituimos en lo anterior $T_{ii}=0$, $\eta_{ii}=1$, f= 1/3 o 1/2

$[]^2h_{ii} = K.[0\ -f.T.1]$

$[]^2h_{ii} = -K.f.T$

La traza es $T= -T_{oo}+T_{11}+T_{22}+T_{33}= -T_{oo}$, resultando:

$[]^2h_{ii} = f.K.T_{oo}$ → $T_{00} = \rho_o.c^2$

$[]^2h_{ii} = K.f.\rho_o.c^2$

En forma similar calculamos la perturbación temporal

$[]^2h_{00} = K.[T_{oo} - f.T.\eta_{oo}]$ → $\eta_{oo} = -1$

$[]^2h_{00} = K.[T_{oo} + f.T]$ → $T_{oo} = \rho.c^2$ $T= -\rho.c^2$

$[]^2h_{00} = K.\rho.c^2[1-f]$

Evaluamos el cociente entre la perturbación espacial y la temporal, recordando la identificación con los potenciales $-g_{oo}=1+2\Phi/c^2$, $g_{ii}=1-2\Psi/c^2$.

$\Psi/\Phi = h_{ii}/h_{oo}$

$\Psi/\Phi = f/(1-f)$ EC-2

A continuación aplicamos un argumento sobre los fotones, vistos como el límite de proyectiles ultra-rápidos y ultra-livianos. En 7.2.2 imaginábamos un experimento en que tales fotones circulaban en dirección horizontal, transversal a la gravedad, y se deflectaban según la fórmula: $d^2z/dt^2 \approx -[\partial_z\Phi_g + u_o^2/c^2.\partial_z\Psi_g]$

Lo que está diciendo esta fórmula es que la sensibilidad a la gravedad es tal que sobre ellos actúa un potencial efectivo $\Phi+\Psi$ en lugar del Φ que actúa sobre las masas materiales.

O sea que tenemos la identificación $k=(\Psi+\Phi)/\Phi$. $k=1+\Psi/\Phi$ EC-3.
Los fotones son "pura energía", nada de masa propia. El 'k' que modula su masa gravitatoria pasiva (mayor sensibilidad a la deflexión) debe ser el mismo 'k' que modula la masa gravitatoria activa de la energía (mayor producción de gravedad). Estamos aplicando los argumentos de simetría conjeturados en 10.5.
Tenemos entonces 3 fórmulas para resolver 3 incógnitas:

$f/(1-f)=k/2 \quad f=k/(k+2)$ EC-1
$\Psi/\Phi = f/(1-f)$ EC-2
$k=1+\Psi/\Phi$ EC-3

Combinando EC-2 con EC-3:

$k = 1 + f/(1-f)$ →sustituimos EC-1
$k = 1 + k/2$
$k/2 = 1$
→k=2

Sustituimos en EC-1:

$f=k/(k+2)=2/(2+2)=1/2$
→f=1/2

Sustituimos en EC-1:

$k=1+\Psi/\Phi$
$2 = 1 + \Psi/\Phi$
→Ψ =Φ

Habiendo despejado el primer parámetro f=1/2, la ecuación de campo nos va quedando:
$[]^2 h_{\alpha\beta} \approx K.[T_{\alpha\beta} - T/2.\eta_{\alpha\beta}]$
Ejercicio: Repetir el escenario de masas en reposo para despejar la constante 'K' en compatibilidad con la Física Clásica de Newton. El resultado al que se llega es $K= -16\pi G/c^4$:

$$[]^2 h^{\alpha\beta} \approx -16.\pi.G/c^4.[T^{\alpha\beta} - T/2.\eta^{\alpha\beta}]$$
$$[]^2 h_{\alpha\beta} \approx -16.\pi.G/c^4.[T_{\alpha\beta} - T/2.\eta_{\alpha\beta}]$$

10.7.3 Efectos gravitomagnéticos:

Tomamos la traza a cada miembro de la ecuación de campo introducida en la sección anterior:

$[]^2 h_{\alpha\beta} = -16.\pi.G/c^4.[T_{\alpha\beta} - T/2.\eta_{\alpha\beta}]$
$[]^2 tr(h_{\alpha\beta}) = -16.\pi.G/c^4.[tr(T_{\alpha\beta}) - T/2.tr(\eta_{\alpha\beta})]$ →sustituimos $tr(\eta_{\alpha\beta})=4$, $T=tr(T_{\alpha\beta})$, $h=tr(h_{\alpha\beta})$
$[]^2 h = -16.\pi.G/c^4.[T - T/2.4]$
$[]^2 h = -16.\pi.G/c^4.[T - 2T]$
$[]^2 h = +16.\pi.G/c^4.T$

Insertamos esta expresión de 'T' en la ecuación de campo.

$[]^2 h_{\alpha\beta} = -16.\pi.G/c^4.[T_{\alpha\beta} - T/2.\eta_{\alpha\beta}]$
$[]^2 h_{\alpha\beta} = -16.\pi.G/c^4.T_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}.16.\pi.G/c^4.T.\eta_{\alpha\beta}$
$[]^2 h_{\alpha\beta} = -16.\pi.G/c^4.T_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}.[]^2 h.\eta_{\alpha\beta}$ →reordenamos
$[]^2 h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}.[]^2 h.\eta_{\alpha\beta} = -16.\pi.G/c^4.T_{\alpha\beta}$ →metemos dentro del operador d'Alembertiano
$[]^2 (h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}.h.\eta_{\alpha\beta}) = -16.\pi.G/c^4.T_{\alpha\beta}$
$[]^2 \bar{h}_{\alpha\beta} = -16.\pi.G/c^4.T_{\alpha\beta}$

Nos aparece una matriz métrica auxiliar $\bar{h}^{\alpha\beta}$, llamada **tensor métrico de traza reversada** (en inglés "*trace-reversed metric*") simbolizada con un techo o una barra encima de la letra h: $\bar{h}_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}.h.\eta_{\alpha\beta}$
Ejercicio: Demostrar que las trazas son opuestas $\bar{h} = -h$.

$\bar{h}^{\alpha\beta} = h^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}.h.\eta^{\alpha\beta}$
$traza(\bar{h}^{\alpha\beta}) = traza(h^{\alpha\beta}) - \frac{1}{2}.h.traza(\eta^{\alpha\beta})$

traza($\overline{h}^{\alpha\beta}$) = traza($h^{\alpha\beta}$) – ½.h.4
traza($\overline{h}^{\alpha\beta}$) = h – 2.h
traza($\overline{h}^{\alpha\beta}$) = –h →esto justifica el nombre de "traza reversada" o traza invertida

Para las métricas de perturbaciones leves que estamos considerando, y bajo la hipótesis Ψ≈Φ, tenemos:
$h^{\alpha\beta} \approx -2/c^2$ *

[Φ_g	$A_{gx}.c$	$A_{gy}.c$	$A_{gz}.c$	]
[$A_{gx}.c$	Φ_g	0	0	]
[$A_{gy}.c$	0	Φ_g	0	]
[$A_{gz}.c$	0	0	Φ_g	]

Traza → $h = -2/c^2.(-\Phi_g+\Phi_g+\Phi_g+\Phi_g) = -4.\Phi/c^2$
$h/2 = -2.\Phi/c^2$
Restar $(h/2).\eta^{\alpha\beta}$ es cancelar los términos de la diagonal espacial y duplicar el término de la diagonal temporal. El tensor métrico de traza reversada queda entonces:
$\overline{h}^{\alpha\beta} \approx -2/c^2$ *

[2Φ_g	$A_{gx}.c$	$A_{gy}.c$	$A_{gz}.c$	]
[$A_{gx}.c$	0	0	0	]
[$A_{gy}.c$	0	0	0	]
[$A_{gz}.c$	0	0	0	]

Este $\overline{h}^{\alpha\beta}$ es el tensor cuyo d'Alembertiano es proporcional al tensor de energía-impulso.
Sus componentes se asocian uno-a-uno con los componentes del tensor de energía-impulso, sin lo que llamamos "mezcla de efectos"; dichas mezclas o cruzamientos se manifiestan en $h^{\alpha\beta}$ pero no en $\overline{h}^{\alpha\beta}$.
Al aparecer $2.\Phi_g$ y $1.\vec{A_g}$ se compensan en forma automática los factores diferentes de las ecuaciones de onda modificadas del "Gravitomagnetismo 2.0", en compatibilidad con la sección 10.5.2
$[]^2\,\overline{h}^{00} = -2/c^2.[]^2(2.\Phi) = -4/c^2.[]^2\Phi = -4/c^2 \,.\, 4.\pi.G.\rho_m$
$[]^2\,\overline{h}^{01} = -2/c^2.[]^2(Agx.c) = -2/c.[]^2Agx = -2/c \,.\, 8.\pi.G.j_{mx}/c^2$

Por otro lado, la divergencia de su primera columna es $c.\nabla\cdot\vec{Ag} + 2/c.\partial_t\Phi g = c.(\nabla\cdot\vec{Ag} + 2/c^2.\partial_t\Phi g)=0$
Que esta divergencia sea nula es equivalente a enunciar la condición de calibre de Lorenz de 10.5.2 (modificada con un factor 2 respecto a su correspondiente en el Electromagnetismo).
Ejercicio: Intentar correlacionar este resultado con la sección 9.6.5 ($\partial_\lambda h^\lambda{}_\mu = ½.\partial_\mu h$) y la métrica de vacío 9.6.6, obtenidas por aproximación del tensor de Ricci en escenarios de gravedad débil.

Al ser nula la divergencia del tensor también es nula la divergencia de su d'Alembertiano, lo que permite asegurar que estamos construyendo un tensor de energía-impulso compatible con la conservación de energía.
Tenemos finalmente una ecuación tensorial que generaliza a la Gravitación de Newton, válida en forma aproximada para campos débiles:

$[]^2\,[\,h^{\alpha\beta} - h/2.\,\eta^{\alpha\beta}] \approx -16.\pi.G/c^4.T^{\alpha\beta}$ en forma contravariante
$[]^2\,[\,h_{\alpha\beta} - h/2.\,\eta_{\alpha\beta}] \approx -16.\pi.G/c^4.T_{\alpha\beta}$ en forma covariante

10.7.4 Efectos de la presión:

La nueva ecuación de la traza reversada permite modelar lo que llamábamos en forma informal "mezclas de efectos" entre las componentes $T_{\alpha\beta}$ y sus correspondientes perturbaciones métricas $h_{\alpha\beta}$ de igual índice.
La ecuación involucra ahora la traza del tensor de energía-impulso, y eso crea una mezcla natural porque todos los $h_{\alpha\beta}$ pasan a depender de esa traza.
Como curiosidad, recordemos que en la sección 9.5 definíamos un "laplaciano relativista" basado en la divergencia covariante. En aquella ocasión utilizábamos el determinante del tensor métrico, y eso también tenía un efecto de "mezcla" porque todos los componentes (al menos los de la diagonal) contribuyen a 'g'.

El análisis quedaría completo si demostráramos que se cumple $\nabla_\alpha T^{\alpha\beta}=0$ también para las coordenadas espaciales β=1,2,3, haciendo un balance de fuerzas que contemple las presiones.

En el régimen de campos débiles estamos limitados a mantener $T^{\alpha\beta}$ *limpio* de perturbaciones métricas y debemos utilizar ∂_α en lugar de ∇_α. Lo que implica que todavía no aparecen fuerzas gravitatorias $\partial_x\Phi_g$ que puedan balancear al término $\partial_x p$, y repercute en que la presión queda mayormente fuera de este estudio.
El único $T^{\alpha\beta}$ que cumple $\partial_\alpha T^{\alpha\beta}=0$ es $T^{\alpha\beta}=\text{diag}(\rho.c^2,0,0,0)$ sin presiones.

Pero podemos extrapolar la forma en que 'p' va a adquirir protagonismo, cuando se vuelva significativa:
$T^{\alpha\beta} \approx$

$$\begin{bmatrix} \rho_o.c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{bmatrix}$$

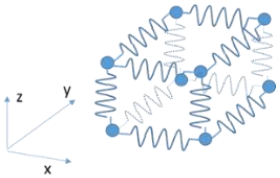
La traza adquiere el valor $T= 3p -\rho_o.c^2$
La fuente de perturbación de hoo es

$$T_{oo} -T/2.\eta_{oo} = T_{oo} +T/2 = \rho_o.c^2 + (3p-\rho_o.c^2)/2 = (3p+\rho_o.c^2)/2$$

Reflexión: ¿Por qué no obtenemos un efecto proporcional a $(p+\rho_o.c^2)$? Eso podría ser esperable, de acuerdo a otra secciones donde vimos cómo la materia presurizada aumentaba su sensibilidad a la gravedad.
Se lograría este efecto utilizando f=1/4 en la ecuación de campo. La fuente de perturbación de hoo quedaría:

$$T_{oo} -T/4.\eta_{oo}= T_{oo} +T/4 = \rho_o.c^2 + (3p-\rho_o.c^2)/4 = (3p+3\rho_o.c^2)/4 = \tfrac{3}{4}(p+\rho_o.c^2).$$

Los desarrollos recientes muestran que es más conveniente plantear la ecuación de campo con f=1/2.
El ejercicio 10.4.4 proponía estudiar la mínima compresibilidad posible que puede tener un sólido etiquetado como *incompresible* para no violar la causalidad, y anticipaba que debería aparecer un efecto adicional proporcional a '$3p/c^2$'.
Si modelamos la materia comprimida como un colchón de resortes similar al de la sección 7.4, tenemos que la presión se manifiesta como una fuerza actuando sobre un área l_o^2 y de valor $k_o.\Delta l_o$. Y que la densidad media es el cociente entre la masa m_o y el volumen de la celda cúbica l_o^3.



(k_o es la constante elástica de los resortes, l_o es la longitud de reposo y Δl_o es la magnitud del acortamiento).

En 10.6.6 realizábamos los cálculos y llegábamos a la conjetura $\rho_{eff} \approx \rho + 3p/c^2$.
Es exactamente lo que estamos reobteniendo ahora, pero en base a una relación causa-efecto que antes no teníamos.

Se puede esbozar otro argumento recordando que para un gas ideal monoatómico se cumple:

u_i	=energía interna por unidad de volumen
n	=densidad de moléculas por unidad de volumen
k_B	=constante de Boltzmann
$p=n.k_B.T$	ecuación del gas ideal
$u_i=3/2.n.k_B.T$	propiedad del tipo de gas (explicada en textos de Termodinámica)

Lo anterior implica que →$p=2/3.u_i$
En la generación de gravedad, a la masa propia se le suma un incremento basado en la presión dando una masa efectiva de:

$\rho_{eff} = \rho_o + 3p/c^2$
$\rho_{eff} = \rho_o + 2u_i/c^2$
$\rho_{eff} = \rho_o + 2u_i/c^2$ →por equivalencia masa-energía, $u_i \backslash c^2 \approx \Delta\rho$'
$\rho_{eff} = \rho_o + 2\Delta\rho$'

Este ejemplo tal vez no tenga mucha aplicación práctica a nivel astrofísico, porque las investigaciones actuales sugieren que el estado más probable o frecuente de los astros es el plasma y no el gas monoatómico.

Lo mostramos para confirmar que nuestros desarrollos parecen ir bien rumbeados.
Puede llamar la atención ese factor '2', pero no es diferente del caso de la masa equivalente a la energía cinética. Estaríamos frente a otra fuente de energía cuya masa gravitatoria activa no vale 'm' sino '2m', como vimos en 10.5

RESUMIENDO: Al menos tres nuevos efectos relativistas surgen de este capítulo:
-Las masas móviles producen un campo gravitatorio incrementado por un factor del orden de $\gamma^2 = \dot{t}^2$, y su efecto gravitomagnético es proporcional a '2M' en lugar del 'M' que correspondería a una extrapolación 100% de la ley de Ampere del Electromagnetismo.
-Las masas estáticas también son fuente de perturbación métrica espacial Ψ_g del mismo orden que la perturbación temporal Φ_g. Se confirma la conjetura de simetría enunciada en 7.2 ($\Delta\Psi = \Delta\Phi$), y se confirma también la conjetura sobre el "ocultamiento" enunciada en 10.4 (masa puntual, cáscara hueca y esfera homogénea deberían producir perturbaciones métricas indistinguibles desde lejos).
-La presión p/c^2 también es fuente de potencial gravitatorio Φ_g, poco significativa en los escenarios de bajos campos pero contribuyente importante del colapso gravitacional de un astro cuando su densidad adquiere cierto valor crítico.

Observación: El recurso de sumar o restar términos en la diagonal de un tensor aparece varias veces en esta rama de la Física y en este mismo capítulo. Por lo pronto ya nos lo encontramos en 10.2.2 al estudiar el modelo de fluido perfecto y en 10.3 al estudiar la contribución de los campos electromagnéticos.

10.7.5 Ecuación de campo tensorial:

Finalmente, para cerrar este capítulo, observamos que encontramos al fin una norma o calibre en la cual tenemos una ecuación de campo verosímil. Una relación causa-efecto entre las perturbaciones métricas y las fuentes de energía, que reproduce todos los resultados que venimos observando desde el capítulo 6 y el capítulo 7.

$$[]^2 [h_{\alpha\beta} - h/2. \eta_{\alpha\beta}] \approx -16.\pi.G/c^4.T_{\alpha\beta}$$

Esta ecuación solo es válida en una única norma: la norma Lorenz en la cual la matriz de perturbaciones satisface la condición de calibre de 9.6.5 $\partial_\alpha h^\alpha{}_\beta = \partial_\beta h/2$.
Este calibre Lorenz tiene la particularidad de simplificar al máximo el tensor de Ricci y conservar solo 1 de los 4 términos vistos en 9.6.4. La simplificación resulta $R_{\alpha\beta} = -½. []^2 h_{\alpha\beta}$, escalar $R = -½. []^2 h$

Las prescripciones de mínimo acople de 9.4 sugieren cómo obtener una ecuación tensorial genérica que trascienda los escenarios simplificados:

- sustituir derivada coordenada por derivada covariante, $\partial_\alpha \rightarrow \nabla_\alpha$
- sustituir la métrica de Minkowski por la métrica total, $\eta_{\alpha\beta} \rightarrow g_{\alpha\beta}$

Ejecutamos los reemplazos, agregando también las sustituciones específicas para este calibre:

$$[]^2 h_{\alpha\beta} - []^2 h/2. \eta_{\alpha\beta} \approx -16.\pi.G/c^4.T_{\alpha\beta}$$
$$[]^2 h_{\alpha\beta} - []^2 h/2. g_{\alpha\beta} \approx -16.\pi.G/c^4.T_{\alpha\beta}$$
$$[-2R_{\alpha\beta} - [-2R]/2. g_{\alpha\beta} \approx -16.\pi.G/c^4.T_{\alpha\beta}$$
$$R_{\alpha\beta} - R/2. g_{\alpha\beta} \approx 8.\pi.G/c^4.T_{\alpha\beta}$$

¿Se podrá finalmente sustituir la aproximación ≈ por una igualdad exacta =?
Vamos muy bien rumbeados, aunque todavía puede subsistir la duda de que la elección de calibre forzó de alguna manera las ecuaciones. No debería ser así, pero es una duda perfectamente respetable a esta altura.

11. ECUACIONES DE CAMPO DE EINSTEIN.

Continuamos el estudio del tensor de energía-impulso y su relación con la métrica.
En la sección 10.6 intentábamos justificar que el operador d'Alembertiano clásico no puede formar parte de una ecuación de campo que opere sobre la métrica completa $[]^2g^{\alpha\beta}$ y $[]^2g_{\alpha\beta}$. Ahora vamos a mostrar que el operador de derivadas necesario está basado en los tensores de curvatura presentados en el capítulo 9.
El resultado obtenido en 10.7 a partir la traza reversada es como un techo, más no podemos subir dentro de las aproximaciones W.F.L (*Weak Field Limit*).
Necesitamos recurrir a los tensores de curvatura para dar el salto hacia las ecuaciones de campo generales, válidas para escenarios que trascienden las simplificaciones de bajas densidades, velocidades reducidas y campos débiles.

11.1 Tensores de Riemann y Ricci.

De acuerdo con nuestros avances actuales, la perturbación métrica tiene la forma siguiente (salvo factor de escala $-2/c^2$)

$h^{\alpha\beta}$	ct	x	y	z
ct	Φ_g	$c.A_{gx}$	$c.A_{gy}$	$c.A_{gz}$
x	$c.A_{gx}$	Ψ_g	…	…
y	$c.A_{gy}$	…	Ψ_g	…
z	$c.A_{gz}$	…	…	Ψ_g

Veremos cómo se comportan la métrica y el tensor de energía-impulso frente a cambios de coordenadas.

11.1.1 Rotación espacial:

Frente a una rotación espacial, el jacobiano del cambio de variables es el siguiente:

Jac[α,β]	ct	X	y	z
Ct	1	0	0	0
X	0	Rxx	Rxy	Rxz
Y	0	Ryx	Ryy	Ryz
Z	0	Rzx	Rzy	Rzz

En la parte espacial tenemos una matriz [R] de norma unitaria que describe la rotación. En el caso particular en que el eje de rotación es uno de los ejes coordenados, aparecen sen(θ) y cos(θ) en las celdas de [R].
La perturbación métrica en las nuevas coordenadas se obtiene a partir de un producto matricial por el jacobiano a la izquierda y a la derecha (una de las veces se utiliza el jacobiano traspuesto).

		Φg	cAg*	1	0
		cAg	Ψg.[I]	0	[R*]
1	0	Φg	cAg*	Φg	cAg*.[R*]
0	[R]	[R].cAg	[R].Ψg.[I]	[R].cAg	[R].Ψg.[I].[R*]

En azul se muestra el resultado del primer producto matricial a la izquierda.
En verde se muestra el resultado del segundo producto matricial a la derecha.
Las matrices [R] tienen la propiedad de que su traspuesta es su inversa y [R].[I].[R*]=[I]=matriz identidad.
La isotropía espacial en (x,y,z) se mantiene, sigue habiendo un potencial temporal Φg y un potencial espacial Ψg en el nuevo referencial.

Advertencia: Es un resultado conocido que los vectores no se transforman igual que los tensores, y que una fila o columna de un tensor no se comporta como un vector aunque tenga la misma dimensión. Esto es debido a que la transformación tensorial involucra 2 productos matriciales.

A pesar de la advertencia recién formulada, en este caso particular el potencial vectorial $A\vec{g}$ presente en la fila-0 y en la columna-0 de la métrica se transforma igual que los vectores frente a una rotación espacial: aparece multiplicado por la matriz [R]. Algo similar ocurre con la fila-0 y la columna-0 del tensor de energía-impulso, identificadas como $j_m\vec{}$ o vectores de flujo másico.
Esto refuerza la identificación entre ambos a través de la ecuación tentativa del laplaciano sugerida al inicio de las secciones 7.1 y 10.1.
Sin embargo, veremos a continuación otros cambios de variable donde aparecen términos extraños en la métrica. Términos que insinúan una correspondencia con densidades de materia o flujos de materia, en contextos en los que *sabemos* que esto no puede ocurrir.

11.1.2 Coordenadas de Rindler:

Partimos de una zona de espacio vacía, lejos de toda perturbación gravitatoria, donde la métrica es esencialmente la de Minkowski: euclideana en la parte espacial, con la parte temporal de signo cambiado.

$$(dS)^2 = -(c.dt)^2 + (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$$

Realizamos el cambio de variables de Rindler para pasar a (cT,X,Y,Z)

$$ct = X.sh(cT/X_H) \qquad x = X.ch(cT/X_H) \qquad y = Y \qquad z = Z$$

La métrica en las nuevas coordenadas toma la forma:

$$(dS)^2 = -(X/X_H)^2.(c.dT)^2 + (dX)^2 + (dY)^2 + (dZ)^2, \quad -g_{TT}=(X/X_H)^2=1+2.\Phi_g/c^2$$

Si aplicáramos como en 7.1.4 la ecuación clásica de Poisson $\nabla^2(\Phi_g)=4.\pi.G.\rho_m$ llegaríamos al absurdo $\rho_m \neq 0$.
El tensor de energía-impulso tenía nulos todos sus componentes locales en el referencial original Σ, y el cambio al referencial acelerado no puede crear algo no nulo partiendo de magnitudes nulas.
El recurso de la traza reversada de la sección 10.6 tampoco arregla esta inconsistencia porque es una operación lineal basada en una traza: si esta traza es nula la estrategia no produce cambios; ninguna operación lineal puede "romper" un cero. Visto de otra manera: al no estar en el calibre Lorenz no podemos aplicar el argumento de la traza reversada, y nos quedamos con la espina clavada de un vacío con un potencial no armónico.
En la sección 9.5 resolvíamos este problema en forma artesanal definiendo un "laplaciano relativista" basado en la derivada covariante en lugar de la derivada coordenada.

Disponemos también de otras herramientas más potentes como el tensor de Riemann: lo definimos en la sección 9.1 y luego vimos que se adaptaba a la cuantificación de la curvatura a través de la ecuación de deriva geodésica *relativista* en 9.2.2.
Vamos a aplicarlo al caso de las coordenadas de Rindler para darles rigor matemático a estas ideas.
A los efectos de reducir el riesgo de error en los cálculos nos apoyamos con el paquete de software Maxima (se puede descargar sin costo, o ejecutar en línea accediendo al sitio https://maxima.cesga.es)

Tensor métrico:

$g_{\alpha\beta}$ =

α \ β	cT	X	Y	Z
cT	$-(X/X_H)^2$	0	0	0
X	0	1	0	0
Y	0	0	1	0
Z	0	0	0	1

Tensor métrico dual:

$g^{\alpha\beta}$ =

α \ β	cT	X	Y	Z
cT	$-(X_H/X)^2$	0	0	0
X	0	1	0	0
Y	0	0	1	0
Z	0	0	0	1

Matrices de Christoffel:

$[C_{CT}]= \Gamma^{\lambda}_{\mu,CT}$ =

λ \ μ	cT	X	Y	Z
cT	0	1/X	0	0
X	X/X_H^2	0	0	0
Y	0	0	0	0
Z	0	0	0	0

$[C_X]= \Gamma^{\lambda}_{\mu,X}$ =

λ \ μ	cT	X	Y	Z
cT	1/X	0	0	0
X	0	0	0	0
Y	0	0	0	0
Z	0	0	0	0

$[C_Y]= \Gamma^{\lambda}_{\mu,Y}$, $[C_Z]= \Gamma^{\lambda}_{\mu,Z}$ = matrices nulas

λ \ μ	cT	X	Y	Z
cT	0	0	0	0
X	0	0	0	0
Y	0	0	0	0
Z	0	0	0	0

Tensor de Riemann:

Según la definición de la sección 9.1, vale:

$$R^{\lambda}_{\mu\alpha\beta} = \partial_\alpha[C_\beta] - \partial_\beta[C_\alpha] + [C_\alpha].[C_\beta] - [C_\beta].[C_\alpha]$$

Los únicos componentes que pueden ser no nulos corresponden a la combinación α=CT, β=X (con la posibilidad de invertir los roles)

Solo importan $\partial_X[C_{CT}]$, $\partial_{CT}[C_X]$ y los productos $[C_X].[C_{CT}]$, $[C_{CT}].[C_X]$

$\partial_X[C_{CT}]$ =

λ \ μ	cT	X	Y	Z
cT	0	$-1/X^2$	0	0
X	$1/X_H^2$	0	0	0
Y	0	0	0	0
Z	0	0	0	0

$\partial_{CT}[C_X]$= matriz nula porque la métrica es estática, no depende de la coordenada temporal CT.

λ \ μ	cT	X	Y	Z
cT	0	0	0	0
X	0	0	0	0
Y	0	0	0	0
Z	0	0	0	0

0	1/X	0	0
X/X_H^2	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

1/X	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

0	$1/X^2$	0	0	
0	0	0	0	
0	0	0	0	
0	0	0	0	<--$[C_X].[C_{CT}]$

				1/X	0	0	0	
				0	0	0	0	
				0	0	0	0	
				0	0	0	0	
0	1/X	0	0	0	0	0	0	
X/X_H^2	0	0	0	$1/X_H^2$	0	0	0	
0	0	0	0	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	0	0	0	<--$[C_{CT}].[C_X]$

Al hacer $\partial_X[C_{CT}]-\partial_{CT}[C_X] + [C_X].[C_{CT}]-[C_{CT}].[C_X]$,
los términos sombreados en verde se cancelan y los sombreados en celeste también.
$R^{\lambda}{}_{\mu,X,CT}$ resulta ser la matriz nula (son cero las 16 combinaciones λ, μ).
Para combinaciones de índices α≠X o β≠CT también se obtiene la matriz nula en $R^{\lambda}{}_{\mu,\alpha,\beta}$.
El tensor de Riemann tiene entonces todos sus componentes nulos, y *se presenta como un mejor candidato para medir la curvatura del espacio-tiempo causada por la materia*. Por lo pronto supera al operador laplaciano o D'Alembertiano clásico en el sentido de que no se deja "engañar" con un cambio de coordenadas aceleradas y no predice la presencia de materia ficticia en el vacío. Más todavía: el Riemann nulo afirma que la métrica es totalmente plana y que no hay masas ni *aquí* ni en ningún lado.

11.1.3 Rotación a velocidad angular uniforme w_o:

Analizamos otro cambio de variable: Σ' rota alrededor de Σ con velocidad angular uniforme.
En un entorno de valores chicos de la coordenada radial 'r', planteamos las siguientes relaciones de transformación para coordenadas cilíndricas:

$$c.dt \approx c.dt' \qquad d\varphi \approx d\varphi' + w_o.dt' \qquad dr = dr' \qquad dz = dz'$$

Suponemos nuevamente un espacio vacío sin materia donde la métrica de Σ es euclideana.

$$(dS)^2 = -(c.dt)^2 + r^2.(d\varphi)^2 + (dr)^2 + (dz)^2$$

Luego de aplicar los cambios de variable queda similar a como hicimos en la sección 6.6

$$(dS')^2 = -(c.dt')^2.[1-r^2.w_o^2/c^2]+ 2.r^2.w_o.dt'.d\varphi' + r^2.(d\varphi')^2 + (dr)^2 + (dz)^2$$

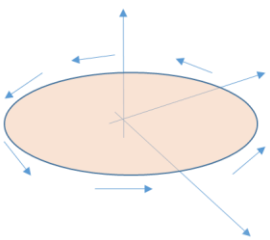
Es conveniente la exigencia de que sea 'r' chico, o más concretamente, $r.w_o \ll c$, porque si permitimos que 'r' se acerque a ese valor crítico c/w_o nos enfrentamos a la dificultad de intepretación que surge de un cambio de signo en el coeficiente métrico g'_{00}.

Tensor métrico:

$g'_{\alpha\beta}$ =

α \ β	ct'	φ'	r'	z'
ct'	$-(1-r^2.w_o^2/c^2)$	$r^2.w_o/c$	0	0
φ'	$r^2.w_o/c$	r^2	0	0
r'	0	0	1	0
z'	0	0	0	1

Aquí son más notorias las objeciones a nuestro modelo tentativo del inicio del capítulo 10.
El $\nabla^2(g'_{oo})$ calculado en 7.1.4 predice ahora la presencia de una masa negativa llenando todo el vacío.
Por otro lado, el término cruzado 01 (α=ct', β=φ') parece insinuar un arrastre, como si estuviera asociado a flujos de materia según la dirección de la coordenada φ'.



Si el espacio estuviera lleno de "polvo interestelar", por más baja que fuera la densidad ρ_m, esta densidad se vería en Σ' como en rotación y podría asociarse a un potencial causante de fuerza centrífuga (y también causante de fuerza de Coriolis, debido a un efecto gravitomagnético).
Pero no es lo que supusimos; estamos trabajando en un espacio vacío y no podemos aceptar que un cambio de variables acelerado "invente" materia y flujos donde no debería haber, o sea, en los alrededores de r≈0.

Calculamos a continuación el tensor de Riemann para ver si desaparecen estas paradojas.

Tensor métrico dual:

$g'^{\alpha\beta}$ =

α \ β	ct'	φ'	r'	z'
ct'	–1	w_o/c	0	0
φ'	w_o/c	$(1–r^2.w_o^2/c^2)/r^2$	0	0
r'	0	0	1	0
z'	0	0	0	1

Matrices de Christoffel:

$[C_{ct}]= \Gamma^{\lambda}_{\mu,ct'}$ =

λ \ μ	ct'	φ'	r'	z'
ct'	0	0	0	0
φ'	0	0	$w_o/(c.r)$	0
r'	$–r.w_o^2/c^2$	$–r.w_o/c$	0	0
z'	0	0	0	0

$[C_{\varphi'}]= \Gamma^{\lambda}_{\mu,\varphi'}$ =

λ \ μ	ct'	φ'	r'	z'
ct'	0	0	0	0
φ'	0	0	1/r	0
r'	$–r.w_o/c$	–r	0	0
z'	0	0	0	0

$[C_r]= \Gamma^{\lambda}_{\mu,r}$ =

λ \ μ	ct'	φ'	r'	z'
ct'	0	0	0	0
φ'	$w_o/(c.r)$	1/r	0	0
r'	0	0	0	0
z'	0	0	0	0

$[C_z]= \Gamma^{\lambda}_{\mu,z}$ =

λ \ μ	ct'	φ'	r'	z'
ct'	0	0	0	0
φ'	0	0	0	0
r'	0	0	0	0
z'	0	0	0	0

Tensor de Riemann:

[Cz] es la matriz nula, y ∂_z es un operador nulo porque nada depende de 'z' en esta métrica.
Lo que implica que son nulos todos los sectores del tensor de Riemann de la forma $R^{\lambda}_{\mu\alpha\beta}$ con α=z o β=z.
Solo falta calcular explícitamente las combinaciones (α,β)=(ct,φ) (ct,r) (φ,r).
Los cálculos resultan más complicados que en el caso de las coordenadas Rindler; con esfuerzo, paciencia y con ayuda del software de Maxima, es posible verificar que el tensor de Riemann también es nulo en esta configuración.

Volvemos a confirmar que este tensor es un indicador más confiable que el laplaciano clásico para medir la curvatura causada por materia (en este caso sabemos que es ausencia de materia).

11.1.4 Métrica de Gullstrand-Painlevé:

$$(dS)^2 = -(c.dT)^2 + [dr + v(r).dT]^2 + r^2.[(d\theta)^2+sen(\theta)^2.(d\varphi)^2]$$

Recordemos que esta métrica introducida en la sección 7.2.4 está pensada como una candidata para describir los alrededores de un astro masivo con simetría esférica.

v(r) es la velocidad de escape, que de acuerdo con la conjetura clásica debería valer $v^2(r)=c^2.r_S/r$.

Tensor métrico:

$g_{\alpha\beta}$ =

α \ β	cT	R	Θ	φ
cT	$-1 + v^2(r)/c^2$	v(r)/c	0	0
R	v(r)/c	1	0	0
Θ	0	0	r^2	0
φ	0	0	0	$r^2.sen^2\theta$

Observación: El determinante del tensor métrico es $det(g)= -r^4.sen^2\theta$, lo resaltamos porque tiene utilidad en el cálculo de volúmenes y divergencia. También observamos que no sufre ninguna rareza matemática al atravesar el horizonte de sucesos $r=r_S$, recordando las reflexiones que realizábamos en la sección 7.2.4.

Tensor métrico dual:

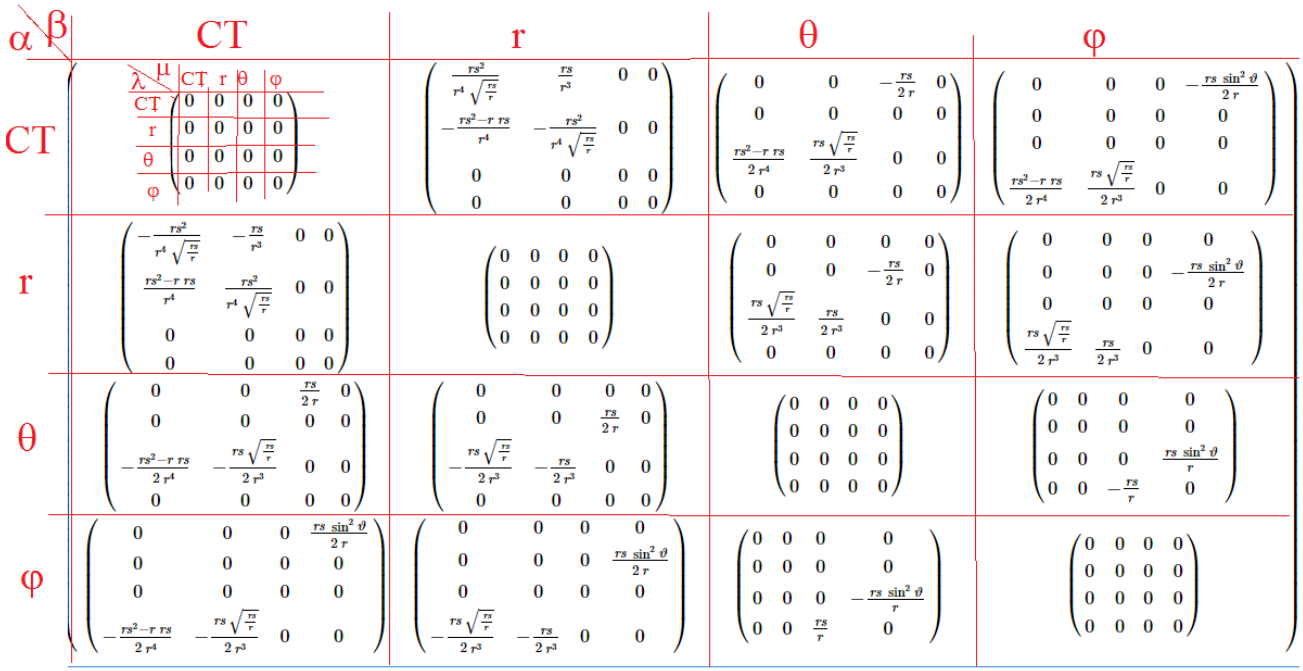
$g^{\alpha\beta}$ =

α \ β	cT	r	Θ	φ
cT	–1	v(r)/c	0	0
R	v(r)/c	$1- v^2(r)/c^2$	0	0
Θ	0	0	$1/r^2$	0
φ	0	0	0	$1/(r^2.sen^2\theta)$

Tensor de Riemann:

Ahora el Riemann no da nulo, lo que pone en evidencia que esta geometría tiene curvatura real, genuina, y no curvatura aparente o "ficticia" creada por cambios de variable.

$R^{\lambda}{}_{\mu\alpha\beta}$: (componentes visualizados como un arreglo 4x4 de 16 matrices 4x4):



A quien piense que es algo horrible le damos la razón: ¡sí, es espantoso! Es lo que habíamos intentado advertir, cuando en la sección 10.6 decíamos que todavía nos faltaba recorrer un poco de camino antes de zambullirnos en los cálculos de Riemann. Pero ya no podemos diferir más el abordaje de las ecuaciones de campo basadas en estos tensores de curvatura, porque son el camino necesario para desprendernos de las aproximaciones de campos débiles.

Lo más que podemos afirmar sobre este tensor de Riemann es que sus componentes no nulos tienen todos alguna potencia del factor (r_S/r), lo que sugiere que se intensifican cuando nos acercamos a la masa 'M' causante de la perturbación y se desvanecen en el límite lejano $r \gg r_S$ donde la métrica tiende a ser plana.

Sin embargo, el que sí se anula es el tensor de Ricci (obtenido por contracción del tensor de Riemann). Veamos como ejemplo $R_{00} = R^{\lambda}{}_{0\lambda 0}$

$R_{00} = R^{0}{}_{000} + R^{1}{}_{010} + R^{2}{}_{020} + R^{3}{}_{030}$

$R_{00} = R^{0}{}_{000} + R^{r}{}_{0r0} + R^{\theta}{}_{0\theta 0} + R^{\varphi}{}_{0\varphi 0}$

$R_{00} = 0 + (r_S^2 - r.r_S)/r^4 - (r_S^2 - r.r_S)/2r^4 - (r_S^2 - r.r_S)/2r^4 = 0$

Otro ejemplo $R_{11} = R^{\lambda}{}_{1\lambda 1}$

$R_{11} = R^{0}{}_{101} + R^{r}{}_{1r1} + R^{\theta}{}_{1\theta 1} + R^{\varphi}{}_{1\varphi 1}$

$R_{11} = r_S/r^3 + 0 - r_S/(2r^3) - r_S/(2r^3) = 0$

Observamos que el concepto de "laplaciano relativista" que definimos informalmente en la sección 9.5 se alinea correctamente con el tensor de Ricci y con el nuevo rumbo que va tomando nuestra teoría.

11.1.5 Métrica de Schwarzschild:

La métrica de Gullstrand-Painlevé tiene un término cruzado r,cT que da la ilusión de que hubiera flujos radiales de materia (si nos guiamos por las ideas de la sección 10.1). El hecho de que el tensor de Ricci sea nulo muestra que no hay tales flujos y que la asociación directa entre el término 01 de la métrica y el término 01 del tensor de energía-impulso es solo ilusoria. O, usando expresiones de las secciones 10.1 a 10.6, estamos experimentando "mezclas de efectos" entre los componentes del tensor de energía-impulso y las perturbaciones de los componentes de la métrica.
La forma de eliminar el término mixto de Gullstrand-Painlevé es pasar a la métrica de Schwarzschild que es diagonal, utilizando el cambio de variables presentado en la sección 7.2.4 $c.dt = c.dT - v(r)/c.dr/(1-r_S/r)$. Que guarda cierta reminiscencia con una transformación de Lorentz de movimiento radial, aunque con la "rareza" de que únicamente afecta a la coordenada temporal manteniendo intacta la coordenada radial.
Curiosidad: Para eliminar un término métrico asociado a un "falso flujo", el cambio de coordenadas tiene la forma de un "falso movimiento".

En lo que respecta a los tensores de Riemann y Ricci, las coordenadas de Schwarzschild no cambian la imagen conceptual que estamos formando:

- El tensor de Riemann no se anula en el espacio vacío exterior al astro masivo, dando a entender que la curvatura es genuina y que en algún lugar están las masas que la causan.
- El tensor que se anula es el de Ricci, lo que se interpreta como que las masas causantes de la curvatura no están aquí, en la zona de análisis ($R_a<r<\infty$), siendo R_a=radio del astro masivo. Están dentro de la frontera $r<R_a$ donde ya no vale la métrica.

El tensor de Riemann tiene 4 índices $R^{\lambda}{}_{\mu\alpha\beta}$. Un análisis desde el punto de vista de los grados de libertad muestra que no puede ser un descriptor satisfactorio de la gravedad porque no puede mapearse al tensor de energía-impulso $T_{\alpha\beta}$ mediante una ecuación tensorial. En cambio el Ricci tiene 2 índices y bien puede ser un candidato a formar parte de una ecuación tensorial: $R_{\mu\beta} = cte.T_{\mu\beta}$.

11.2 Ecuaciones de Einstein.

El camino conceptual que venimos recorriendo en los capítulos anteriores es aproximadamente el siguiente:

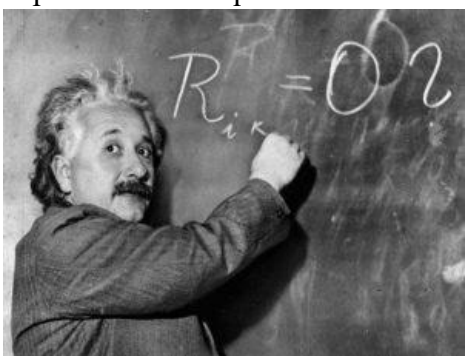
- Vemos métricas diferentes de la cartesiana donde los coeficientes $g_{\alpha\beta}$ varían con la posición siguiendo funciones no lineales en las coordenadas.
- La gravedad se manifiesta en forma de perturbaciones métricas en $g_{\alpha\beta}$ y en fenómenos como: fuerza ficticia que causa caída libre, efecto Doppler, dilatación temporal, curvatura de luz, …etc.
- El "doble gradiente" $\partial^i\partial_j g_{\alpha\beta}$ se presenta como la primera herramienta descriptora de geometrías curvas, y su contracción i=j (laplaciano ∇^2 o d'Alembertiano $[]^2$) es quien distingue si las masas causantes de la perturbación están "aquí" o alejadas de la región de análisis.
- Estudiamos indicadores que cuantifican el apartamiento de una métrica respecto a la referencia euclídea: suma de ángulos de un triángulo, longitud de una circunferencia, deriva geodésica… etc. Este estudio nos advierte que ciertas métricas aparentemente curvas en realidad son métricas planas descritas en coordenadas curvilíneas.
- El tensor de Riemann reemplaza al doble-gradiente para generalizar la desviación geodésica en presencia de campos gravitatorios arbitrarios, no necesariamente débiles.
- El tensor de Riemann suplanta al doble-gradiente en cuanto a distinguir geometrías realmente curvas, y el tensor de Ricci sustituye al laplaciano clásico para discriminar si la causa de la perturbación es local o remota. O, eventualmente, para cuantificar la generación de perturbaciones métricas en el caso en que no es nulo (cuidando el factor -1/2 sugerido en 9.2.2 y 9.2.4)

Al llegar a este punto estamos tentados de aventurar una ecuación de campo en forma tensorial:

$R^{\mu\beta}= K.T^{\mu\beta}$ $R_{\mu\beta}= K.T_{\mu\beta}$,

donde K sería un factor de escala que podríamos despejar recurriendo a casos particulares y al límite de las bajas velocidades y gravedades débiles.

Y esta es precisamente la forma de la ecuación de campo para el vacío ($R^{\mu\beta}=0$ para $T^{\mu\beta}=0$), pero no la expresión exacta que hizo famoso a Einstein [fuente https://institucional.us.es/blogimus/2019/05/einstein-y-hilbert-1/]



Hay distintas formas de concluir que esta formulación es todavía incompleta, veremos al menos dos de ellas.

Por un lado, exploraremos el vacío que rodea a una distribución de materia. Aún aceptando que $R_{\mu\beta}=0$ describe correctamente la zona vacía, encontraremos que $R_{\mu\beta}= K.T_{\mu\beta}$ no es la ecuación que mejor se "enlaza" o "une" con las regiones pobladas de materia; hay mejores candidatas.

Por otro lado analizaremos la divergencia covariante del tensor de Ricci. Para formular una ecuación que involucre a ambos tensores $T^{\mu\beta}$ y $R^{\mu\beta}$, es imprescindible que se cumpla la condición de divergencia nula $\nabla_\mu T^{\mu\beta}=0$, porque eso asegura compatibilidad con las leyes de conservación de la masa y la energía.

En ambos casos comenzaremos ayudándonos con las aproximaciones de campo débil para "adivinar" la forma de las ecuaciones de campo. Posponemos para más adelante la demostración formal de la divergencia covariante del Ricci, que es algo simple de enunciar pero complicado de demostrar matemáticamente. Se deben utilizar las simetrías del tensor de Riemann y las Identidades de Bianchi mencionadas en 9.4, y finalmente ejecutar contracciones de índices para hacer aparecer el tensor de Ricci y el escalar de Ricci.

11.2.1 Unión entre el vacío y la materia:

En el capítulo 9.6 anticipábamos el protagonismo que tendría el tensor de Ricci en la generación de gravedad y calculábamos en forma aproximada sus componentes en los escenarios de campos débiles.
El resultado al que llegamos fue $R_{\mu\beta} \approx -½.\,[\partial_\beta\partial_\mu h - \partial_\beta\partial^\lambda h_{\lambda\mu} - \partial_\lambda\partial_\mu h^\lambda{}_\beta + []^2 h_{\beta\mu}\,]$

Calibre de divergencia no-nula:

La condición de Lorenz/De Donder para calibre armónico $\partial_\lambda h^\lambda{}_\mu = \partial_\mu(h/2)$ permitía reducir considerablemente la complejidad de las expresiones, quedando $R_{\alpha\mu} \approx -½.[]^2 h_{\alpha\mu}$ y $R \approx -½.[]^2 h$.
Anular todos los componentes del Ricci $R_{\alpha\mu}$ significa imponer $[]^2 h_{\alpha\mu}=0\ \forall\alpha\forall\mu$. En el capítulo 9.6.6 resolvíamos y encontrábamos para el vacío exterior a una masa esférica: $h_{ii}=h_{oo}=r_S/r$

$$(dS)^2 \approx -(c.dt)^2.(1-r_S/r) + (1+r_S/r).(dx^2+dy^2+dz^2)$$

En el Electromagnetismo sabemos que los armónicos de laplaciano nulo en cierta región se corresponden con fuentes ubicadas en otra región (el método de las imágenes utiliza este concepto).
Prolongamos la idea hacia este escenario gravitatorio. En el caso de h_{oo} exterior ($r>R_a$) sus *fuentes* son las masas ρ_m ubicadas en $r<R_a$, siendo R_a el radio del astro masivo → lo que implica que esas masas también son las fuentes principales de la perturbación espacial h_{ii}.
La contribución mayoritaria de h_{ii} *no proviene de las presiones ubicadas en* T_{ii} (muy poco significativas en el escenario de campos débiles) sino por las masas ubicadas en T_{oo}.
Esto que llamábamos *mezcla de efectos* entra en conflicto con las primeras versiones de ecuación de campo $[]^2 h_{\alpha\beta}=cte.T_{\alpha\beta}$ propuestas tentativamente en 7.1 y en 10.1, pero armoniza perfectamente con la ecuación de traza reversada presentada en 10.7: $[]^2\,(h^{\alpha\mu} - h/2.\,\eta^{\alpha\mu}) = -16.\pi.G/c^4.\,T^{\alpha\mu}$

Calibre de divergencia nula:

Puede quedar la sensación de que la condición de calibre "*forzó*" las soluciones, haciendo aparecer perturbaciones métricas en la diagonal espacial. Anunciamos que también es posible resolver la métrica con el otro calibre propuesto; hay una diferencia notable en la complejidad de los cálculos, pero los fenómenos físicos descritos no deberían cambiar.
En el primer calibre propuesto en 9.6 $\partial_\alpha h^\alpha{}_\beta=0$, debemos resolver para cada pareja de índices $\alpha\ \mu$:
$R_{\alpha\mu}=0 \rightarrow \quad []^2 h_{\alpha\mu} + \partial_\alpha\partial_\mu h=0$
Las ecuaciones están todas acopladas por causa de la traza 'h', se requiere un buen esfuerzo de cálculo para desacoplarlas. Primero debemos demostrar que la traza 'h' es armónica $[]^2 h=0$, y comenzar probando con el primer armónico esférico de la forma $h=A/r$. Si no hubiera resultado favorable habría que continuar con armónicos esféricos de orden superior.
Afortunadamente no es el caso, se puede demostrar que la siguiente métrica cumple con todas las propiedades deseadas: $h=r_S/r,\ h_{\alpha\mu}= r_S/2.(X_\alpha X_\mu/r^3 + 1/r.\delta Kron_{\alpha\mu})$
El primer término $X_\alpha X_\mu/r^3$ es una solución particular de la ecuación diferencial, y el armónico 1/r en la diagonal es una solución homogénea que se ajusta para cumplir con el calibre.

$h_{xx}=r_S/(2r).(1+x^2/r^2)$	$h_{xy}=r_S.x.y/(2r^3)$	$h_{xz}=r_S.x.z/(2r^3)$
$h_{yx}=r_S.y.x/(2r^3)$	$h_{yy}=r_S/(2r).(1+y^2/r^2)$	$h_{yz}=r_S.y.z/(2r^3)$
$h_{zx}=r_S.z.x/(2r^3)$	$h_{zy}=r_S.z.y/(2r^3)$	$h_{zz}=r_S/(2r).(1+z^2/r^2)$

La métrica no tiene isotropía en x,y,z, pero de cualquier manera es inmediato advertir que sus coeficientes son del mismo orden de magnitud que el temporal h_{00}: orden $\sim r_S/r$. Estamos mejorando el planteo inicial de 10.1 donde marcábamos la métrica espacial como 'o2', orden 2.
Visto desde otro ángulo: la elección del calibre Lorenz no "forzó" la aparición de perturbaciones métricas espaciales, estas eran inevitables. Lo único que hizo fue "concentrarlas" todas en la diagonal.
Otra propiedad del calibre de divergencia nula era $R= -[]^2 h$ (vista en 9.6.5). Si los coeficientes de la diagonal espacial fueran insignificantes, tendríamos que el término dominante en el interior de la materia sería $h \approx -h_{oo}= 2\Phi/c^2$ →¡Resultaría un R=negativo! Un escalar de curvatura negativo se asocia en general a repulsión y a alejamiento de geodésicas, no es compatible con las observaciones actuales.

11.2.2 Divergencia del tensor de Ricci:

Exploramos ahora el cálculo de la divergencia, para comprobar cómo este tensor se puede "emparejar" o "alinear" con el tensor de materia $T_{\alpha\beta}$ y con las condiciones de conservación de la energía.
Aspiramos a un resultado general que no dependa de ninguna elección de calibre, así que volvemos a la expresión completa (¡y larga!) encontrada en 9.6, con 4 contribuciones:

$R_{\mu\beta} \approx -\frac{1}{2}.\ [\partial_\beta\partial_\mu h - \partial_\beta\partial^\lambda h_{\lambda\mu} - \partial_\lambda\partial_\mu h^\lambda{}_\beta + \Box^2 h_{\beta\mu}\ ]$ →subimos el índice μ

$R^\mu{}_\beta \approx -\frac{1}{2}.\ [\partial_\beta\partial^\mu h - \partial_\beta\partial^\lambda h_\lambda{}^\mu - \partial_\lambda\partial^\mu h^\lambda{}_\beta + \Box^2 h_\beta{}^\mu\ ]$ →contraemos μ=β

escalar $R=R^\mu{}_\mu \approx -\frac{1}{2}.\ [\partial_\mu\partial^\mu h - \partial_\mu\partial^\lambda h_\lambda{}^\mu - \partial_\lambda\partial^\mu h^\lambda{}_\mu + \Box^2 h_\mu{}^\mu\ ]$ →reconocemos traza h

$R \approx -\frac{1}{2}.\ [\partial_\mu\partial^\mu h - \partial_\mu\partial^\lambda h_\lambda{}^\mu - \partial_\lambda\partial^\mu h^\lambda{}_\mu + \Box^2 h\ ]$ →identificamos operador d'Alembertiano

$R \approx -\frac{1}{2}.\ [\Box^2 h - \partial_\mu\partial^\lambda h_\lambda{}^\mu - \partial_\lambda\partial^\mu h^\lambda{}_\mu + \Box^2 h\ ]$ →agrupamos

$R \approx -\frac{1}{2}.\ [-\partial_\mu\partial^\lambda h_\lambda{}^\mu - \partial_\lambda\partial^\mu h^\lambda{}_\mu + 2\Box^2 h\ ]$

Los dos términos sin agrupar tienen en realidad igual valor numérico. Tanto λ como μ son índices sumados, cualquiera de ellos se puede subir en una de sus instancias, si luego se baja en la otra aparición para mantener el balance. Ejercicio: demostrarlo.

$R \approx -\frac{1}{2}.\ [-2\partial_\mu\partial^\lambda h_\lambda{}^\mu + 2\Box^2 h\ ]$

$R \approx \partial_\mu\partial^\lambda h_\lambda{}^\mu - \Box^2 h$

$\mathbf{R \approx \partial_\mu\partial_\lambda h^{\lambda\mu} - \Box^2 h}$

Retomamos la expresión de varianza mixta, para tomar divergencia.

$R^\mu{}_\beta \approx -\frac{1}{2}.\ [\partial_\beta\partial^\mu h - \partial_\beta\partial^\lambda h_\lambda{}^\mu - \partial_\lambda\partial^\mu h^\lambda{}_\beta + \Box^2 h_\beta{}^\mu\ ]$ →derivamos ∂_μ

$\partial_\mu R^\mu{}_\beta \approx -\frac{1}{2}.\ [\partial_\beta\partial_\mu\partial^\mu h - \partial_\beta\partial^\lambda\partial_\mu h_\lambda{}^\mu - \partial_\lambda\partial_\mu\partial^\mu h^\lambda{}_\beta + \Box^2\partial_\mu h_\beta{}^\mu\ ]$

$\partial_\mu R^\mu{}_\beta \approx -\frac{1}{2}.\ [\partial_\beta\partial_\mu\partial^\mu h - \partial_\beta\partial^\lambda\partial_\mu h_\lambda{}^\mu - \partial_\lambda\partial_\mu\partial^\mu h^\lambda{}_\beta + \Box^2\partial_\mu h_\beta{}^\mu\ ]$ →detectamos d'Alembertianos

$\partial_\mu R^\mu{}_\beta \approx -\frac{1}{2}.\ [\partial_\beta\Box^2 h - \partial_\beta\partial^\lambda\partial_\mu h_\lambda{}^\mu - \partial_\lambda\Box^2 h^\lambda{}_\beta + \Box^2\partial_\mu h_\beta{}^\mu\ ]$

$\partial_\mu R^\mu{}_\beta \approx -\frac{1}{2}.\ [\partial_\beta\Box^2 h - \partial_\beta\partial^\lambda\partial_\mu h_\lambda{}^\mu - \partial_\lambda\Box^2 h^\lambda{}_\beta + \Box^2\partial_\mu h_\beta{}^\mu\ ]$ →renombramos λ→μ

$\partial_\mu R^\mu{}_\beta \approx -\frac{1}{2}.\ [\partial_\beta\Box^2 h - \partial_\beta\partial^\lambda\partial_\mu h_\lambda{}^\mu - \partial_\mu\Box^2 h^\mu{}_\beta + \Box^2\partial_\mu h_\beta{}^\mu\ ]$

$\partial_\mu R^\mu{}_\beta \approx -\frac{1}{2}.\ [\partial_\beta\Box^2 h - \partial_\beta\partial^\lambda\partial_\mu h_\lambda{}^\mu - \partial_\mu\Box^2 h^\mu{}_\beta + \Box^2\partial_\mu h_\beta{}^\mu\ ]$ →detectamos opuestos y cancelamos

$\partial_\mu R^\mu{}_\beta \approx -\frac{1}{2}.\ [\partial_\beta\Box^2 h - \partial_\beta\partial^\lambda\partial_\mu h_\lambda{}^\mu + 0\ ]$ →sacamos ∂_β fuera del paréntesis

$\partial_\mu R^\mu{}_\beta \approx -\frac{1}{2}.\partial_\beta(\ \Box^2 h - \partial^\lambda\partial_\mu h_\lambda{}^\mu)$ →subimos y bajamos λ

$\partial_\mu R^\mu{}_\beta \approx -\frac{1}{2}.\partial_\beta(\ \Box^2 h - \partial_\lambda\partial_\mu h^{\lambda\mu})$

$\partial_\mu R^\mu{}_\beta \approx \frac{1}{2}.\partial_\beta(\ \partial_\lambda\partial_\mu h^\lambda - \Box^2 h\ )$ →reconocemos el escalar de Ricci

$\mathbf{\partial_\mu R^\mu{}_\beta \approx \partial_\beta(R/2)}$

Este resultado nos dice que la divergencia del Ricci no es nula si hay un escalar 'R' variando en el espacio y/o en el tiempo (lo que es esperable en presencia de materia). Un tensor de materia Tμβ construido proporcional a este Ricci no cumpliría las leyes de conservación. Pero estamos muy cerca de encontrar una versión que sí las cumpla.

$\partial_\mu R^\mu{}_\beta \approx \partial_\beta\ (R/2)$ →hacemos aparecer ∂_μ

$\partial_\mu R^\mu{}_\beta \approx \partial_\mu\eta^\mu{}_\beta\ (R/2)$ →pasamos restando

$\partial_\mu R^\mu{}_\beta - \partial_\mu\eta^\mu{}_\beta\ (R/2) \approx 0$ →separamos ∂_μ

$\partial_\mu[R^\mu{}_\beta - (R/2).\eta^\mu{}_\beta\ ] \approx 0$

Estos son los tensores con divergencia nula: $\mathbf{R^\mu{}_\beta - (R/2).\eta^\mu{}_\beta}$, $\mathbf{R^{\mu\beta} - (R/2).\eta^{\mu\beta}}$, $\mathbf{R_{\mu\beta} - (R/2).\eta_{\mu\beta}}$, en cualquiera de sus variantes de índices, siempre que se respete el balance. Estos tensores sí pueden igualarse al tensor de energía a través de una constante de proporcionalidad.

11.2.3 Ecuación de traza reversada:

En la sección 10.7.5 habíamos llegado a esta aproximación en regímenes de campos débiles:

$[]^2\,[\,h_{\alpha\beta} - h/2.\,\eta_{\alpha\beta}] \approx -16.\pi.G/c^4.T_{\alpha\beta}$ $\qquad$ $[]^2 h_{\alpha\beta} - []^2(h/2).\,\eta_{\alpha\beta}] \approx -16.\pi.G/c^4.T_{\alpha\beta}$

Podemos hacer aparecer el tensor de Ricci y el escalar de Ricci, utilizando su valor aproximado dentro del calibre Lorenz.

$[]^2 h_{\alpha\beta} - []^2(h/2).\,\eta_{\alpha\beta}] \approx -16.\pi.G/c^4.T_{\alpha\beta}$ $\qquad$ $\rightarrow R_{\alpha\beta} = -(1/2).\,[]^2 h_{\alpha\beta}$

$-2.R_{\alpha\beta} - []^2(h/2).\,\eta_{\alpha\beta}] \approx -16.\pi.G/c^4.T_{\alpha\beta}$

$-2.R_{\alpha\beta} - []^2(h/2).\,\eta_{\alpha\beta}] \approx -16.\pi.G/c^4.T_{\alpha\beta}$ $\qquad$ $\rightarrow R = -(1/2).\,[]^2 h$

$-2.R_{\alpha\beta} + R.\eta_{\alpha\beta}] \approx -16.\pi.G/c^4.T_{\alpha\beta}$ $\qquad$ $\rightarrow$dividimos

$R_{\alpha\beta} - (R/2).\eta_{\alpha\beta} \approx +8.\pi.G/c^4.T_{\alpha\beta}$

Una expresión que es válida en régimen de campos débiles y que está bien formada tensorialmente debería ser transportable a escenarios de gravedad arbitraria. Las recetas de mínimo acople de 9.4 sugieren que la sustitución de $\eta_{\alpha\beta}$ por $g_{\alpha\beta}$ conduciría a una ecuación de campo válida. Con signo '=' en lugar de '≈'.

Esta es es la ecuación de campo que estamos buscando: $R_{\alpha\beta} - (R/2).g_{\alpha\beta} = +8.\pi.G/c^4.T_{\alpha\beta}$

Basada en el tensor de Ricci como generalización del d'Alembertiano, y con la propiedad de que en el límite de los campos débiles se reduce a la ecuación conjeturada en 10.7.

Estrictamente no es una sola ecuación sino un conjunto de varias: se llaman ECUACIONES DE CAMPO DE EINSTEIN en honor a quien las publicó por primera vez en 1915.

La expresión tensorial es simple de enunciar, pero su solución puede llegar a ser extraordinariamente compleja porque involucra hasta 10 ecuaciones diferenciales acopladas. Con la particularidad de que son ecuaciones diferenciales no lineales, lo que agrega una dificultad extra que no se presenta en otras ramas de la Física como el Electromagnetismo. *Pregunta: ¿Porqué 10 ecuaciones y no 16?*

11.2.4 Conservación de la energía:

Como anunciábamos al inicio de este capítulo en la sección 11.2: el tensor de Ricci no tiene divergencia covariante nula, le hace falta un término adicional para poder equipararse al tensor de energía-impulso con un factor de escala.

La demostración general requiere el uso de las identidades de Bianchi y la posponemos para la sección siguiente 11.2.6. Mientras tanto nos concentramos en el caso particular de los campos débiles porque consideramos que los resultados son más "visibles" con menos cálculos matemáticos.

Para que se cumpla la conservación de energía, debe verificarse:

$\partial_\alpha []^2 \{h^{\alpha\lambda} - \tfrac{1}{2}.h.\eta^{\alpha\lambda}\} \approx 0$

Intercambiando el orden de los operadores de derivación, queda:

$[]^2 \partial_\alpha \{h^{\alpha\lambda} - \tfrac{1}{2}.h.\eta^{\alpha\lambda}\} \approx 0$

$[]^2 f = 0$ $\qquad$ $\rightarrow$siendo $f = \partial_\alpha \{h^{\alpha\lambda} - \tfrac{1}{2}.h.\eta^{\alpha\lambda}\}$

Aclaración: $[]^2 f = 0$ no implica f=0; existen muchas funciones 'f' no nulas cuyo d'Alembertiano es nulo. Sin embargo, comprobaremos que la condición de Lorenz es una forma particular de construir un d'Alembertiano nulo en base a una función nula.

$\partial_\alpha \{h^{\alpha\lambda} - \tfrac{1}{2}.h.\eta^{\alpha\lambda}\} = 0$

$\partial_\alpha h^{\alpha\lambda} - \tfrac{1}{2}.\partial_\alpha h.\eta^{\alpha\lambda} = 0$

$\partial_\alpha h^{\alpha\lambda} = \tfrac{1}{2}.\partial_\alpha h.\eta^{\alpha\lambda}$ $\qquad$ $\rightarrow$bajamos un índice

$\partial_\alpha h^{\alpha\lambda}.\eta_{\lambda\mu} = \tfrac{1}{2}.\partial_\alpha h.\eta^{\alpha\lambda}.\eta_{\lambda\mu}$

$\partial_\alpha h^{\alpha}{}_{\mu} = \tfrac{1}{2}.\partial_\alpha h.\eta^{\alpha}{}_{\mu}$

$\partial_\alpha h^{\alpha}{}_{\mu} = \tfrac{1}{2}.\partial_\alpha h.\delta Kron(^{\alpha}{}_{\mu})$

$\partial_\alpha h^{\alpha}{}_{\mu} = \tfrac{1}{2}.\partial_\mu h$

Vemos entonces la interpretación de la condición de calibre impuesta en 9.6.5: es una forma (no la única) de asegurar la conservación de la energía.

El caso particular de μ=0 corresponde a la columna temporal. Es la más fácil de estudiar, y también la más significativa en los regímenes de campos débiles.

De acuerdo con nuestro modelo de perturbación, tenemos (salvo factor de escala $-2/c^2$, que omitimos en esta sección porque no influye en los resultados):

$h^{\alpha\mu}$	Ct	X	y	z
Ct	Φ_g	$c.A_{gx}$	$c.A_{gy}$	$c.A_{gz}$
X	$c.A_{gx}$	Ψ_g	…	…
Y	$c.A_{gy}$	…	Ψ_g	…
Z	$c.A_{gz}$	…	…	Ψ_g

Al bajar uno de los índices, queda:

$h^{\alpha}{}_{\mu}$	Ct	X	y	z
Ct	$-\Phi_g$	$c.A_{gx}$	$c.A_{gy}$	$c.A_{gz}$
X	$-c.A_{gx}$	Ψ_g	…	…
Y	$-c.A_{gy}$	…	Ψ_g	…
Z	$-c.A_{gz}$	…	…	Ψ_g

La divergencia de la columna-0 es:

$$\partial_\alpha h^\alpha{}_0 = -c.\nabla\cdot\vec{A} - \partial_{ct}\Phi_g$$

Por otro lado, la traza es $h = -\Phi g + 3.\Psi g$, que se aproxima como $2.\Phi g$ bajo la hipótesis $\Phi\approx\Psi$.
El miembro derecho de la condición de calibre queda:

$$\tfrac{1}{2}.\partial_o h = \tfrac{1}{2}.\partial_{ct}(2.\Phi g) = \partial_{ct}(\Phi_g)$$

La condición de calibre, para la columna-0, toma la forma

$$-c.\nabla\cdot\vec{A_g} - \partial_{ct}\Phi_g = \partial_{ct}(\Phi_g)$$

$$\nabla\cdot\vec{A_g} + 2/c^2.\partial_t\Phi_g = 0$$

Coincide con la ecuación presentada en 10.5.2 luego de la conjetura de que las masas 'M' debían pesar '2M' en la generación de los campos gravitomagnéticos, lo que repercutía en una Ley de Ampere con factor doble respecto al Electromagnetismo. A aquella condición le agregamos 3 nuevas, una por cada columna 1,2,3.

11.2.5 Transformaciones de calibre o "gauge":

En la sección 9.6 advertíamos que quedaba fuera del alcance del capítulo un estudio minucioso de estas transformaciones de calibre. Pero luego presentamos muchos ejemplos en el capítulo 10.6, y consideramos que ya es tiempo de darles a estas tranformaciones un rigor un poco más formal y de relacionar el tema con los tensores de Ricci y Riemman.

Definición: las transformaciones de calibre consisten en pasar de un conjunto de coordenadas X^α a uno nuevo X'^α apartadas un pequeño desplazamiento ξ^α.

$X^\alpha = X'^\alpha + \xi^\alpha$ $\qquad |\xi^\alpha| \ll |X'^\alpha|$

$dX^\alpha = dX'^\alpha + \partial\xi^\alpha/\partial X'^\lambda.dX'^\lambda$ $\qquad \rightarrow$en versión diferencial

La métrica expandida queda:

$(dS)^2 = g_{\alpha\beta}.dX^\alpha.dX^\beta$

$(dS)^2 = g_{\alpha\beta}.(dX'^\alpha + \partial\xi^\alpha/\partial X'^\lambda.dX'^\lambda).(dX'^\beta + \partial\xi^\beta/\partial X'^\lambda.dX'^\lambda)$ $\rightarrow$expandimos

$(dS)^2 = (g_{\alpha\beta}.dX'^\alpha + g_{\alpha\beta}.\partial\xi^\alpha/\partial X'^\lambda.dX'^\lambda).(dX'^\beta + \partial\xi^\beta/\partial X'^\lambda.dX'^\lambda)$

$(dS)^2 \approx g_{\alpha\beta}.dX'^\alpha.dX'^\beta + g_{\alpha\beta}.dX'^\beta.\partial\xi^\alpha/\partial X'^\lambda.dX'^\lambda + g_{\alpha\beta}.dX'^\alpha.\partial\xi^\beta/\partial X'^\lambda.dX'^\lambda$

Al ser chicos los apartamientos ξ, descartamos el término de orden $\xi*\xi$ como infinitésimo de mayor orden.

$(dS)^2 \approx g_{\alpha\beta}.dX'^\alpha.dX'^\beta + g_{\alpha\beta}.\partial\xi^\alpha/\partial X'^\lambda.dX'^\beta.dX'^\lambda + g_{\alpha\beta}.\partial\xi^\beta/\partial X'^\lambda.dX'^\alpha.dX'^\lambda$ $\rightarrow$bajamos índice de ξ

$(dS)^2 \approx g_{\alpha\beta}.dX'^\alpha.dX'^\beta + \partial\xi_\beta/\partial X'^\lambda.dX'^\lambda.dX'^\beta + \partial\xi_\alpha/\partial X'^\lambda.dX'^\lambda.dX'^\alpha$

A continuación renombramos los índices "tontos" o "*dummy*"

$(dS)^2 \approx g_{\alpha\beta}.dX'^\alpha.dX'^\beta + \partial\xi_\beta/\partial X'^\lambda.dX'^\lambda.dX'^\beta + \partial\xi_\alpha/\partial X'^\lambda.dX'^\lambda.dX'^\alpha$

$(dS)^2 \approx g_{\alpha\beta}.dX'^\alpha.dX'^\beta + \partial\xi_\beta/\partial X'^\alpha.dX'^\alpha.dX'^\beta + \partial\xi_\alpha/\partial X'^\beta.dX'^\beta.dX'^\alpha$ $\rightarrow$factor común

$(dS)^2 \approx (g_{\alpha\beta} + \partial\xi_\beta/\partial X'^\alpha + \partial\xi_\alpha/\partial X'^\beta).dX'^\alpha.dX'^\beta$

$(dS)^2 \approx g'_{\alpha\beta}.dX'^\alpha.dX'^\beta$

Identificamos $g'_{\alpha\beta} \approx g_{\alpha\beta} + \partial_\alpha\xi_\beta + \partial_\beta\xi_\alpha$

Para métricas levemente perturbadas con $g_{\alpha\beta}=\eta_{\alpha\beta}+h_{\alpha\beta}$, esto es equivalente a:

$h'_{\alpha\beta} \approx h_{\alpha\beta} + \partial_\alpha \xi_\beta + \partial_\beta \xi_\alpha$

Llegamos a una forma muy parecida a la de 4.5.5 $A'_\alpha \approx A_\alpha + \partial_\alpha f$

En aquel caso trabajábamos con Electromagnetismo, donde el potencial se podía describir con un tensor de rango 1 y la transformación de calibre sumaba el gradiente de un escalar. Ahora en Relatividad General la perturbación gravitatoria se describe por un tensor $h_{\alpha\beta}$ de rango 2, y la transformación de calibre consiste en la suma de 2 gradientes de vectores (o, más precisamente, la suma de un gradiente con su traspuesto).

Como consecuencia del desplazamiento infinitesimal de coordenadas, la métrica pasa a tener una perturbación infinitesimal. Pero en régimen W.F.L. esta métrica ya era una variación infinitesimal de la de Minkowski, y tal como observábamos en 10.6.2, los coeficientes métricos pueden sufrir una modificación del mismo orden de magnitud que los que ya había presentes antes de la transformación.
Ahora agregamos un comentario: la modificación puede y DEBE ser del mismo orden de magnitud, si es que queremos realmente obtener algún resultado significativo: por ejemplo, eliminar los términos fuera de la diagonal para pasar a un calibre diagonal, o hacer nula la traza.

Invarianza del tensor de Riemann:
Advertimos que los cálculos que siguen no son simpáticos, pero los consideramos necesarios para marcar el camino de transición hacia las ecuaciones de campo generales.
Las transformaciones de calibre estudiadas en el capítulo 10.6 producen muchos cambios en los coeficientes $h_{\alpha\beta}$ y en su relación con la métrica. Habría en principio una ecuación de campo W.F.L diferente para cada calibre, solamente encontramos una para el calibre Lorenz (la ecuación de traza reversada de 10.7).
Sin embargo hay algo que se conserva durante estas transformaciones de calibre: el tensor de Riemann.
SUS 256 COMPONENTES SE CONSERVAN (dentro de las incertidumbres de aproximación).
La deriva geodésica y las fuerzas de marea son la esencia de la gravedad, y se describen mediante el Riemann. Las ecuaciones de campo deben ser formuladas en base a este tensor (o a alguna de sus contracciones como el Ricci).

Ejercicio:
Calcular el tensor de Riemann para la nueva métrica en las coordenadas desplazadas ξ o "recalibradas".
Demostrar que da igual que en las coordenadas originales, dentro de las hipótesis de campos débiles que permiten aproximar como en 9.6.3 $R'^{\lambda}{}_{\mu\alpha\beta} \approx \tfrac{1}{2}. [\partial_\alpha\partial_\mu h'^{\lambda}{}_\beta - \partial_\alpha\partial^\lambda h'_{\beta\mu} - \partial_\beta\partial_\mu h'^{\lambda}{}_\alpha + \partial_\beta\partial^\lambda h'_{\alpha\mu}]$.
$2R'^{\lambda}{}_{\mu\alpha\beta}$= (1) –(2) –(3) +(4)
A cada uno de los 4 términos le aplicamos la transformación de calibre, luego tratamos de sombrear o resaltar con el mismo color las parejas que se cancelen.

(1)	$= \partial_\alpha\partial_\mu h'^{\lambda}{}_\beta$	$= \partial_\alpha\partial_\mu(h^{\lambda}{}_\beta + \partial^\lambda\xi_\beta + \partial_\beta\xi^\lambda)$	$= \partial_\alpha\partial_\mu h^{\lambda}{}_\beta + \partial_\alpha\partial_\mu\partial^\lambda\xi_\beta + \partial_\alpha\partial_\mu\partial_\beta\xi^\lambda$
–(2)	$= -\partial_\alpha\partial^\lambda h'_{\beta\mu}$	$= -\partial_\alpha\partial^\lambda(h_{\beta\mu} + \partial_\beta\xi_\mu + \partial_\mu\xi_\beta)$	$= -\partial_\alpha\partial^\lambda h_{\beta\mu} - \partial_\alpha\partial^\lambda\partial_\beta\xi_\mu - \partial_\alpha\partial^\lambda\partial_\mu\xi_\beta$
–(3)	$= -\partial_\beta\partial_\mu h'^{\lambda}{}_\alpha$	$= -\partial_\beta\partial_\mu(h^{\lambda}{}_\alpha + \partial^\lambda\xi_\alpha + \partial_\alpha\xi^\lambda)$	$= -\partial_\beta\partial_\mu h^{\lambda}{}_\alpha - \partial_\beta\partial_\mu\partial^\lambda\xi_\alpha - \partial_\beta\partial_\mu\partial_\alpha\xi^\lambda$
(4)	$= \partial_\beta\partial^\lambda h'_{\alpha\mu}$	$= \partial_\beta\partial^\lambda(h_{\alpha\mu} + \partial_\alpha\xi_\mu + \partial_\mu\xi_\alpha)$	$= \partial_\beta\partial^\lambda h_{\alpha\mu} + \partial_\beta\partial^\lambda\partial_\alpha\xi_\mu + \partial_\beta\partial^\lambda\partial_\mu\xi_\alpha$

$2R'^{\lambda}{}_{\mu\alpha\beta} \approx \partial_\alpha\partial_\mu h^{\lambda}{}_\beta - \partial_\alpha\partial^\lambda h_{\beta\mu} - \partial_\beta\partial_\mu h^{\lambda}{}_\alpha + \partial_\beta\partial^\lambda h_{\alpha\mu}$ $= 2R^{\lambda}{}_{\mu\alpha\beta}$ original $\rightarrow \mathbf{R'^{\lambda}{}_{\mu\alpha\beta} \approx R^{\lambda}{}_{\mu\alpha\beta}}$
→Tenemos entonces una familia de métricas que describen todas el mismo sistema físico en cuanto a curvatura del espaciotiempo.
Estamos en un escenario similar al del Electromagnetismo: disponemos de un grado de libertad para imponer condiciones adicionales a los componentes de la perturbación métrica $h_{\alpha\beta}$. Que se interpretan como potenciales gravitatorios Φ_g, Ψ_g y gravitomagnéticos A_{gx}, A_{gy}, A_{gz}.

Ejemplo de transformación de calibre:
Pasamos de la métrica $h_{\alpha\beta}$ (basada en el calibre Lorenz) a la métrica $h'_{\alpha\beta}$ (basada en el calibre Coulomb).
La transformación de coordenadas es $X_\alpha = X'_\alpha.[1 - r_S/(4r)]$, con perturbación $\xi_\alpha = -r_S.X_\alpha/(4r)$.

Cuando estamos sobre la superficie de la Tierra, $r \approx 6300km$ y $r_S \approx 9mm$ → ciertamente se trata de un desplazamiento ínfimo, que "*no se nota*".
El efecto sobre la métrica es del mismo orden de magnitud que la propia perturbación, y resulta en la aparición de componentes h'_{ij} fuera de la diagonal $i \neq j$ (cuando en la norma Lorenz era $h_{ij}=0$).
$h'_{ij}=h_{ij} + \partial_i\xi_j + \partial_j\xi_i$
Los coeficientes ξ de la perturbación se obtienen de resolver una ecuación diferencial.
En este caso tenemos:
$\xi_x = -r_S.x/(4r)$ $\quad\quad$ $\partial_y\xi_x = r_S.x/(4r^2).(y/r) = r_S.x.y/(4r^3)$
$\xi_y = -r_S.y/(4r)$ $\quad\quad$ $\partial_x\xi_y = r_S.y/(4r^2).(x/r) = r_S.x.y/(4r^3)$
$h'_{xy}=h_{xy} + \partial_x\xi_y + \partial_y\xi_x = 0 + r_S.x.y/(4r^3) + r_S.x.y/(4r^3)$
$h'_{xy} = r_S.x.y/(2r^3)$ →comparar con el resultado de 11.2.1
$\partial_x\xi_x = -r_S/(4r) + r_S.x/(4r^2).(x/r) = -r_S/(4r) + r_S.x^2/(4r^3)$
$h'_{xx}=h_{xx} + 2\partial_x\xi_x = r_S/r - r_S/(2r) + r_S.x^2/(2r^3)$
$h'_{xx}=h_{xx} + 2\partial_x\xi_x = r_S/(2r) + r_S.x^2/(2r^3)$ →comparar con el resultado de 11.2.1

<u>Variación del tensor de energía-impulso</u>:
Podríamos preguntarnos si el tensor de energía-impulso no se modifica con la transformación de calibre. Felicitamos por su suspicacia a quienes hayan tenido esa duda. La respuesta es afirmativa: sí, se modifica. Pero la variación $\delta T_{\alpha\beta}$ es insignificante frente a los valores anteriores $|\delta T_{\alpha\beta}| \ll |T_{\alpha\beta}|$. Si continuara siendo válida la misma ecuación de campo al cambiar de calibre, serían esperables variaciones $|\delta h_{\alpha\beta}| \ll |h_{\alpha\beta}|$.
Que un cambio de calibre produzca $|\delta h_{\alpha\beta}| \approx$ del mismo orden de magnitud que las $|h_{\alpha\beta}|$ es consistente con el hecho de que la ecuación de campo varía con cada calibre, cuando la intentamos formular en base a operadores $\partial_\alpha\ \partial_\beta$ no covariantes. Sólo una formulación en base a tensores $R_{\alpha\beta}$ resiste un cambio de calibre. Y en esa formulación, las eventuales variaciones $|\delta T_{\alpha\beta}|$ son ignoradas porque caen fuera del orden de precisión del modelo W.F.L.
<u>Ejercicio</u>: Comprobar esto analizando cómo repercute el pasaje del calibre Lorenz al calibre Coulomb en las magnitudes 'ρ', 'p' y en los restantes casilleros del tensor de energía-impulso.

<u>11.2.6 Divergencia covariante del tensor de Ricci</u>:

A continuación presentamos una demostración matemática que implica un gran ejercicio de subida y bajada de índices, algo que alguna vez fue definido en forma humorística como "gimnasia de índices".
<u>Ejercicio</u>: Investigar quién o quiénes inventaron el término "gimnasia de índices"

Partimos de la segunda identidad de Bianchi de 9.4.2: $\quad\quad \nabla_\sigma R^\lambda{}_{\mu\alpha\beta} + \nabla_\beta R^\lambda{}_{\mu\sigma\alpha} + \nabla_\alpha R^\lambda{}_{\mu\beta\sigma} = 0$

Intercambiamos los índices $\sigma\alpha$ en el segundo término, lo que por antisimetría repercute en un cambio de signo. $\quad\quad \nabla_\sigma R^\lambda{}_{\mu\alpha\beta} - \nabla_\beta R^\lambda{}_{\mu\alpha\sigma} + \nabla_\alpha R^\lambda{}_{\mu\beta\sigma} = 0$

Contraemos $\lambda=\alpha$ y reconocemos los tensores de Ricci que se forman
$\nabla_\sigma R^\alpha{}_{\mu\alpha\beta} - \nabla_\beta R^\alpha{}_{\mu\alpha\sigma} + \nabla_\alpha R^\alpha{}_{\mu\beta\sigma} = 0$
$\nabla_\sigma R_{\mu\beta} - \nabla_\beta R_{\mu\sigma} + \nabla_\alpha R^\alpha{}_{\mu\beta\sigma} = 0$

Multiplicamos por $g^{\rho\mu}$ para elevar el índice μ; recordamos que la métrica puede entrar y salir libremente de los operadores de derivación covariante.
$g^{\rho\mu}.(\nabla_\sigma R_{\mu\beta} - \nabla_\beta R_{\mu\sigma} + \nabla_\alpha R^\alpha{}_{\mu\beta\sigma}) = 0$
$\nabla_\sigma (g^{\rho\mu}.R_{\mu\beta}) - \nabla_\beta (g^{\rho\mu} R_{\mu\sigma}) + \nabla_\alpha (g^{\rho\mu}.R^\alpha{}_{\mu\beta\sigma}) = 0$
$\nabla_\sigma R^\rho{}_\beta - \nabla_\beta R^\rho{}_\sigma + \nabla_\alpha R^{\alpha\rho}{}_{\beta\sigma} = 0$

Invertimos los índices del último término, valiéndonos de una de las simetrías demostradas en 9.4.3.
$\nabla_\sigma R^\rho{}_\beta - \nabla_\beta R^\rho{}_\sigma + \nabla_\alpha R^{\alpha\rho}{}_{\beta\sigma} = 0$

$$\nabla_\sigma R^\rho{}_\beta - \nabla_\beta R^\rho{}_\sigma - \nabla_\alpha R^{\rho\alpha}{}_{\beta\sigma} = 0$$

Contraemos $\rho=\beta$ y reconocemos los tensores de Ricci y los escalares de Ricci que se forman

$$\nabla_\sigma R^\rho{}_\beta - \nabla_\beta R^\rho{}_\sigma - \nabla_\alpha R^{\rho\alpha}{}_{\beta\sigma} = 0$$
$$\nabla_\sigma R^\beta{}_\beta - \nabla_\beta R^\beta{}_\sigma - \nabla_\alpha R^{\beta\alpha}{}_{\beta\sigma} = 0$$
$$\nabla_\sigma R - \nabla_\beta R^\beta{}_\sigma - \nabla_\alpha R^\alpha{}_\sigma = 0$$

Identificamos que el segundo término y el último término son lo mismo porque usan índices dummy que se colapsan en la suma: en un caso índice β, en el otro caso índice α.

$$\nabla_\sigma R - \nabla_\beta R^\beta{}_\sigma - \nabla_\alpha R^\alpha{}_\sigma = 0$$
$$\nabla_\sigma R - 2.\nabla_\alpha R^\alpha{}_\sigma = 0$$
$$\nabla_\alpha R^\alpha{}_\sigma - \nabla_\sigma (R/2) = 0$$

Finalmente multiplicamos por la métrica dual $g^{\sigma\beta}$, y uniformizamos los índices dummy que se generen.

$$g^{\sigma\beta}.[\nabla_\alpha R^\alpha{}_\sigma - \nabla_\sigma (R/2)\,] = 0$$
$$\nabla_\alpha R^{\alpha\beta} - \nabla_\sigma (R/2.\, g^{\sigma\beta}) = 0 \qquad \rightarrow \sigma,\alpha \text{ son índices “dummy”}$$
$$\nabla_\alpha R^{\alpha\beta} - \nabla_\alpha (R/2.\, g^{\alpha\beta}) = 0$$
$$\nabla_\alpha (R^{\alpha\beta} - R/2.g^{\alpha\beta}) = 0$$

Al tensor de Ricci, si le restamos el tensor métrico escalado por el factor (R/2), lo convertimos en un tensor de divergencia covariante nula llamado “TENSOR DE EINSTEIN”.
Este es un resultado muy importante para poder construir un equivalente (salvo factor de escala) del tensor de energía-impulso.
Es decir, el lado “izquierdo” de la ecuación de campo de Einstein que se mapea al lado derecho $8.\pi.G/c^4.T^{\alpha\beta}$

$$G^{\mu\beta} = R^{\mu\beta} - R/2.g^{\mu\beta}$$

Este tensor, al tener divergencia covariante nula, se puede usar como candidato para igualar término a término con el tensor de energía-impulso, a menos de un factor de escala.
Las ecuaciones de campo de la gravitación adquieren entonces la forma:

$$R^{\mu\beta} - R/2.g^{\mu\beta} = (8.\pi.G/c^4).T^{\mu\beta}$$

Observación-1: No hay un acuerdo universal sobre el signo de la ecuación, como tampoco lo hay para la métrica de Minkowski (signatura +,-,-,- o signatura -,+,+,+). En otras publicaciones puede haber signos diferentes que corresponden a distintas definiciones de los tensores de Riemann y Ricci.
Observación-2: De alguna manera se están recorriendo los mismos pasos de la sección 10.7 para campos débiles: primero buscar identificar $T^{\alpha\lambda}$ con $[]^2h^{\alpha\lambda}$ y luego “refinar” el cálculo sustituyendo $h^{\alpha\lambda}$ por su versión de traza reversada $h^{\alpha\lambda} - h/2.g^{\alpha\lambda}$.
Observación-3: El tensor de Einstein es la versión de traza reversada respecto del tensor de Ricci.

Demostración de esto recién enunciado:
A la definición de tensor de Einstein le tomamos la traza tanto a la izquierda como a la derecha.
Tomar la traza empieza por multiplicar por la métrica adecuada (tensor métrico o tensor dual), con el objetivo de que quede un tensor mixto con un índice alto y un índice bajo.

$$G^{\alpha\mu} = R^{\alpha\mu} - R/2.g^{\alpha\mu}$$
$$g_{\lambda\alpha}.G^{\alpha\mu} = g_{\lambda\alpha}.R^{\alpha\mu} - R/2.\, g_{\lambda\alpha}.g^{\alpha\mu}$$
$$G_\lambda{}^\mu = R_\lambda{}^\mu - R/2.\, g_\lambda{}^\mu$$

Lo que sigue ahora es una contracción $\lambda=\mu$, que implica una sumatoria de los elementos de la diagonal.

$$G_\lambda{}^\lambda = R_\lambda{}^\lambda - R/2.\, g_\lambda{}^\lambda \qquad \rightarrow g_\lambda{}^\mu \text{ es la matriz identidad, y su traza es } 1+1+1+1=4$$
$$G = R - R/2.\, 4$$
$$G = R - 2.R \quad \rightarrow G = -R$$

11.3 Formulación lagrangeana.

Complementamos el capítulo "Ecuaciones de Campo" presentando dichas ecuaciones a través de un enfoque totalmente diferente basado en ecuaciones variacionales, enfoque en el que estuvo trabajando Hilbert en forma contemporánea con Einstein.
Para entender mejor la formulación variacional, comenzamos aplicando a las ecuaciones de Maxwell las ideas introducidas en la Mecánica de las partículas. Luego continuaremos con la Gravitación.

11.3.1 Lagrangeano clásico:

En la Mecánica Clásica nos ubicamos en el objetivo de calcular la trayectoria de una partícula, para lo cual tenemos los siguientes elementos:

- Una variable independiente 't'.
- 3 funciones incógnitas x(t), y(t), z(t) de la variable independiente 't'.
- Una integral en la variable independiente 't' llamada integral de acción $\mathbb{S}=\int \mathcal{L}(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},t).dt$
- El integrando de la acción, llamado Lagrangeano, contiene a las funciones incógnitas x,y,z y también a sus derivadas respecto a la variable de integración llamadas "velocidades".
- El Principio de Mínima Acción establece que las funciones incógnitas más probables son las que hacen estacionaria la acción.
- Las ecuaciones diferenciales que hay que resolver son las ecuaciones variacionales de Euler-Lagrange y dicen que, para cada coordenada x^h, se cumple
  $$d/dt\ [\partial\mathcal{L}/\partial\dot{x}^h]-\partial\mathcal{L}/\partial x^h=F_h$$

Cuando la partícula estudiada es una carga eléctrica, aparecen en el Lagrangeano términos de interacción de la materia con los campos: $q.(\Phi - \vec{u}\cdot\vec{A})$. Son los potenciales del capítulo 2 y del capítulo 5.5.

11.3.2 Lagrangeano electromagnético, Relatividad Especial:

Al transportar estas ideas a la Teoría de la Relatividad, debemos poner atención en que el Lagrangeano sea invariante frente a cambios de coordenadas. A los efectos de la Relatividad Especial alcanza con que el Lagrangeano resista rotaciones espaciales y transformaciones de Lorentz; a los efectos de la Relatividad General la exigencia se extiende a cualquier cambio arbitrario de coordenadas.
→ la parte "cinética" del Lagrangeano adquiere la forma "bien-variante" $U_\alpha U^\alpha$. "Bien-variante" en el sentido de que se balancean correctamente los índices bajos y altos, lo que queda es un escalar invariante.
El invariante relativista que sustenta esta formulación es el tiempo propio 'τ', relacionado íntimamente con la métrica a través de $(dS)^2= -c^2(d\tau)^2$.
→ la parte "potencial" o de interacción campo←→materia adquiere la forma $q.A_\alpha U^\alpha$ también invariante.

Cuando nos enfrentamos a un volumen cargado con muchas partículas, surgen dos dificultades:

- Por un lado, no es práctico seguir la trayectoria individual de cada una de las partículas q[i], con i=1,2…N (siendo N un número inmenso!). Se prefiere realizar una partición en un conjunto reducido de clases de equivalencia, o mejor aún, trabajar con los promedios macroscópicos ρ y $\vec{J}$ definidos en la sección 4.1 como $\rho=\sum_i(\gamma[i]q[i]/\Delta vol)$ y $\vec{J}=\sum_i(\gamma[i]q[i]u[i]^{\rightarrow}/\Delta vol)$
- Por otro lado, los potenciales Φ y $\vec{A}$ ya no pueden considerarse como "dados" sino que son también parte de las incógnitas que debemos calcular para resolver el problema en forma completa. De hecho, es muy común trabajar en escenarios electromagnéticos donde las cargas están limitadas a una región pequeña. El resto de las regiones, llamadas "vacío", no contienen cargas ni corrientes pero sí potenciales eléctricos y magnéticos que deben ser calculados.

La sumatoria de todos los $\gamma[i]q[i].A_\alpha U^\alpha[i]$ dentro de un volumen da lugar al producto escalar entre los cuadrivectores de carga y de potencial: $A_\alpha J^\alpha$.
A su vez, cada volumen ΔVol con su masa Δm_o aporta un "diferencial de acción" $-\Delta m_o.c^2.d\tau$

La acción pasa a ser una integral volumétrica además de una integral en el tiempo.
El integrando ya no sería estrictamente un Lagrangeano sino que habría que llamarlo densidad lagrangeana.

$\mathcal{L} = A_\alpha J^\alpha$ + otros términos

Acción $\mathcal{S} = \int (\iiint \mathcal{L}.dx.dy.dz)dt$

Así como las coordenadas (x,y,z) eran las incógnitas de la trayectoria de una masa puntual, ahora las componentes del cuadripotencial A_α son nuestras incógnitas y se llaman coordenadas generalizadas.

$\mathcal{S} = \iiint\int \mathcal{L}(A_\alpha)dx.dy.dz.dt$

Las variables independientes son 4: (t,x,y,z), y las funciones incógnitas son funciones de esas 4 variables $A_\alpha(t,x,y,z)$.
Para poder completar esta formulación lagrangeana del Electromagnetismo precisamos un invariante que contenga las "velocidades generalizadas", en forma análoga a como la energía cinética se formaba sumando los productos $U_\alpha U^\alpha$.

El invariante electromagnético ya lo tenemos definido en 5.6.5 y consiste en escalar adecuadamente la cantidad $-Y= F_{\alpha\beta}.F^{\alpha\beta}$. Este es nuestro candidato a formar parte de la densidad lagrangeana.
Dentro del tensor de campo electromagnético están "escondidas" nuestras "velocidades generalizadas".
$F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha = U_{\alpha\beta} - U_{\beta\alpha}$
Esta es una de las velocidades: $U_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta = \partial A_\beta / \partial x^\alpha$, derivada de la coordenada generalizada de índice 'β' respecto a la variable independiente de índice 'α'.
Para acentuar más el parecido con la Mecánica Clásica, observamos que el invariante 'Y' es cuadrático en las velocidades generalizadas, así como lo era la energía cinética en las velocidades mecánicas.

Re-encontramos los mismos elementos que en la mecánica de partículas, para establecer un paralelismo:

- 4 variables independientes ct,x,y,z→ x^β con β=0,1,2,3.
- 4 incógnitas $A_\alpha(x^\beta)$, funciones de esas 4 variables.
- Una integral en esas 4 variables llamada integral de acción $Acc=\iiint\int \mathcal{L}(A_\alpha,U_{\beta\alpha}).dt.dx.dy.dz$
  Se integra en un tetra-volumen de 4 dimensiones.
- El integrando de la acción, llamado Lagrangeano, contiene a las funciones incógnitas A_α y también a sus derivadas respecto a las variables de integración, $U_{\beta\alpha}$, análogas a las "velocidades".
- El Principio de Mínima Acción establece que las funciones incógnitas más probables en la Naturaleza son las que hacen estacionaria la acción.
- Las ecuaciones diferenciales que hay que resolver son las ecuaciones variacionales de Euler-Lagrange y dicen que, para cada coordenada A_λ, se cumple:
  $\partial_\mu [\partial\mathcal{L}/\partial U_{\mu\lambda}] - \partial\mathcal{L}/\partial A_\lambda = F^\lambda$

Observaciones:
→Ignoramos por el momento la "fuerza generalizada F^λ" porque todavía no tiene cabida en el modelo.
→Para cada λ hay 4 velocidades generalizadas $U_{\mu\lambda}$ y las ecuaciones variacionales son en realidad una suma en μ (está omitido el signo de sumatoria porque nos basamos en la convención de suma de Einstein).
→La densidad lagrangeana tiene 2 partes: una potencial asociada a la interacción de los campos con las cargas, y una cinética o relativa a los campos (que es la dominante en las regiones vacías).

La expresión es: $\mathcal{L}(A_\alpha , U_{\beta\alpha}) = -1/(4\mu_o).F_{\alpha\beta}.F^{\alpha\beta} + A_\alpha J^\alpha$

$\partial_\mu [\partial\mathcal{L}/\partial U_{\mu\lambda}] = \partial\mathcal{L}/\partial A_\lambda$

El factor μ_o es necesario para ajustar las unidades de energía por unidad de volumen. El signo y el factor de escala ¼ no los justificamos en detalle, quedarán confirmados cuando planteemos las ecuaciones de Euler-Lagrange y veamos que surgen las ecuaciones de Maxwell.

Ecuación variacional para la coordenada generalizada A_λ:
Término derecho $\partial\mathcal{L}/\partial A_\lambda = \partial(A_\alpha J^\alpha)/\partial A_\lambda$

$= \partial(A_\alpha)/\partial A_\lambda \; . \; J^\alpha$

$= \delta Kron[\alpha,\lambda] \; . \; J^\alpha = J^\lambda$

Término izquierdo $\partial_\mu [\partial\mathcal{L}/\partial U_{\mu\lambda}]$ =

$= -1/(4\mu_o).\partial_\mu[\partial(F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta})/\partial U_{\mu\lambda}]$

$= -1/(4\mu_o).\partial_\mu[F^{\alpha\beta}\partial(F_{\alpha\beta})/\partial U_{\mu\lambda} + F_{\alpha\beta}\partial(F^{\alpha\beta})/\partial U_{\mu\lambda}]$

Ejercicio: Demostrar que en el corchete recto se está sumando 2 veces lo mismo

$F^{\alpha\beta}\partial(F_{\alpha\beta})/\partial U_{\mu\lambda} = F_{\alpha\beta}\partial(F^{\alpha\beta})/\partial U_{\mu\lambda} = 2\,F^{\mu\lambda}$

Recordar $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha = U_{\alpha\beta} - U_{\beta\alpha}$

Queda entonces $\partial_\mu [\partial\mathcal{L}/\partial U_{\mu\lambda}] = -1/(4\mu_o)\,\partial_\mu[2\,F^{\mu\lambda} + 2\,F^{\mu\lambda}]$

$\partial_\mu [\partial\mathcal{L}/\partial U_{\mu\lambda}] = -1/(4\mu_o)\,\partial_\mu[4F^{\mu\lambda}]$

$\partial_\mu [\partial\mathcal{L}/\partial U_{\mu\lambda}] = -1/\mu_o\,\partial_\mu[F^{\mu\lambda}]$

Sustituyendo en la ecuación variacional, tenemos:

Izquierdo = Derecho

$\partial_\mu [\partial\mathcal{L}/\partial U_{\mu\lambda}] = \partial\mathcal{L}/\partial A_\lambda$

$-1/\mu_o\,\partial_\mu[F^{\mu\lambda}] = J^\lambda$

$$\partial_\mu[F^{\mu\lambda}] = -\mu_o\,J^\lambda$$

Tenemos entonces las ecuaciones de Maxwell escritas en forma tensorial, como en 5.6.2 y 5.6.3.

Caso particular electrostático:

En este escenario simplificado, el cuadripotencial y la cuadricorriente solo tienen componente temporal:

$A^\alpha(\Phi/c,0,0,0)$ →negamos para convertir a covariante

$A_\alpha=(-\Phi/c,0,0,0)$

$J^\alpha=(c\rho,0,0,0)$ → $A_\alpha J^\alpha = -\rho.\Phi$

El invariante electromagnético definido en el capítulo 5, vale $F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}=2(B^2-E^2/c^2)$.

En el caso electrostático B=0 se reduce a $F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}=-2E^2/c^2$.

Sustituimos en la densidad lagrangeana:

$\mathcal{L} = -1/(4\mu_o).F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} + A_\alpha J^\alpha$

$\mathcal{L} = -1/(4\mu_o).(-2E^2/c^2) + -\rho.\Phi$

$\mathcal{L} = 1/(2\mu_o).E^2/c^2 - \rho\Phi$ →hacemos aparecer ϵ_o

$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\,\epsilon_o\,E^2 - \rho\Phi$ →para escenarios electrostáticos $\vec{E}=-\nabla\Phi$,

$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\,\epsilon_o\,[(\partial_x\Phi)^2+(\partial_y\Phi)^2+(\partial_z\Phi)^2] - \rho\Phi$

Tiene la forma exacta de resta de energías cinética – potencial.

Esto invita a reflexionar sobre el significado físico de una acción que uno quiere minimizar.

Las configuraciones deseadas por la Naturaleza suelen asociarse a energía mínima, por el 2do Principio de la Termodinámica. Sin embargo, cuando el Lagrangeano es una diferencia de energías cinética-potencial, el signo de estos términos hace que un mayor Φ contribuya a una menor acción. Parece al revés de lo esperado y puede causar cierta confusión. Para recuperar la confianza deberemos confirmar que la solución variacional coincide con la conocida $\nabla^2\Phi = -\rho/\epsilon_o$.

Los términos verdes se identifican con energía cinética, esto queda claro al calcular los momentos:

Momento-x$=\partial\mathcal{L}/\partial(\partial_x\Phi) = \epsilon_o.\,\partial_x\Phi$ (*momento está emparentado con velocidad generalizada*)

Momento-y$=\partial\mathcal{L}/\partial(\partial_y\Phi) = \epsilon_o.\,\partial_y\Phi$

Momento-z$=\partial\mathcal{L}/\partial(\partial_z\Phi) = \epsilon_o.\,\partial_z\Phi$

Ejercicio: Expandir la suma $\partial_\mu [\partial\mathcal{L}/\partial(\partial_\mu\Phi)]$, ver que $\partial\mathcal{L}/\partial\Phi = -\rho$, y confirmar que la ecuación de Euler-Lagrange coincide con la de Poisson de la Electrostática.

11.3.3 Lagrangeano electromagnético, Relatividad General:

Para contemplar coordenadas curvilíneas y espacio-tiempos curvos debe incluirse el determinante del tensor métrico en las integrales de volumen, aplicando las “recetas” de mínimo acople vistas en 9.4.

Acción $S = \iiint \text{func}(A_\alpha, U_{\beta\alpha}).\sqrt{-g}.dt.dx.dy.dz$

El Lagrangeano ahora es la misma función $\text{func}(A_\alpha, U_{\beta\alpha})$ de la Relatividad Especial pero multiplicada por el factor que involucra al determinante.

$$\mathcal{L}(A_\alpha , U_{\beta\alpha}) = -\sqrt{-g}/(4\mu_o).F_{\alpha\beta}.F^{\alpha\beta} + \sqrt{-g}.A_\alpha J^\alpha$$

Las ecuaciones variacionales pasan a ser:

Izquierdo = Derecho

$$\partial_\mu [\partial\mathcal{L}/\partial U_{\mu\lambda}] = \partial\mathcal{L}/\partial A_\lambda$$

$$-1/(4\mu_o).\partial_\mu\{\sqrt{-g}.\partial[F_{\alpha\beta}.F^{\alpha\beta}]/\partial U_{\mu\lambda}\} = \sqrt{-g}.\ J^\lambda$$

Los cálculos muy similares a los ya realizados y dan:

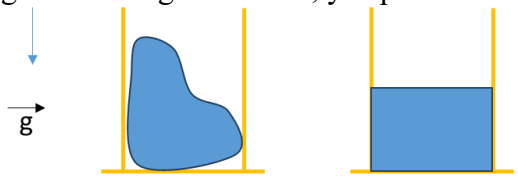
$$-1/\mu_o.\partial_\mu\{\sqrt{-g}.F^{\mu\lambda}\} = \sqrt{-g}.\ J^\lambda$$

$$1/\sqrt{-g}.\partial_\mu\{\sqrt{-g}.F^{\mu\lambda}\} = -\mu_o J^\lambda \qquad \rightarrow \nabla_\mu F^{\mu\lambda} = -\mu_o J^\lambda$$

El término izquierdo es, de acuerdo con la sección 9.2.1, la divergencia covariante expresada en términos del determinante métrico y las derivadas coordenadas.

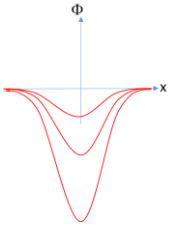
11.3.4 Lagrangeano gravitatorio, introducción clásica:

Consideramos un conjunto de partículas (dibujadas como un fluido azul) en presencia de un campo gravitatorio $\vec{g}$ conocido, y suponemos ciertas restricciones dadas por el recipiente naranja del dibujo.



¿Cuál será el perfil de densidad espacial ρ(x,y,z) que van a "*elegir*" las partículas para organizarse?
Claramente se debería parecer más a la figura derecha que a la izquierda, porque se suele buscar la configuración de mínima energía potencial gravitatoria $U_{pot} = \iiint_{V3} \Phi(x,y,z)\rho(x,y,z).dx.dy.dz$.
Este criterio de minimización resuelve solo la mitad de los aspectos de interés de la gravitación: la forma en que se mueven las masas, cómo son atraídas hacia las zonas de menor potencial gravitatorio Φ.

Falta el otro aspecto: cómo se genera la función de potencial Φ(x,y,z) a partir de las propias masas.
El principio es el mismo: minimizar la energía potencial gravitatoria. Lo que cambian son las restricciones. Ahora fijamos las masas y ajustamos el potencial; pero si lo dejamos demasiado libre, este buscará bajar hasta valores infinitamente negativos en la zona en que hay presencia de materia. Debemos, como mínimo, exigir que sea nulo en el infinito para una distribución de materia acotada. Y también debemos "*penalizar*" sus variaciones, tanto crecientes como decrecientes.
Al realizar cortes en el plano yz, para materia concentrada alrededor del origen coordenado, esperaríamos perfiles Φ(x) como en la figura siguiente:



Según cuánto sea la penalización por variación, el potencial podrá llegar más bajo o menos bajo.
Nuestra función de "costo total" sería: $CT = \iiint \tfrac{1}{2}.k.|\nabla\Phi|^2.dVol + \iiint \rho\Phi.dVol$
Se compone de dos contribuciones:

- Costo energético (se desea lo más negativo posible).
- Costo de variación, se penaliza el módulo al cuadrado del gradiente.

‘k’ es una constante de acoplamiento que lleva todo a las mismas unidades energéticas, y cuantifica el peso relativo de las subidas y bajadas de la función Φ respecto a los otros costos. Por supuesto que no vamos a “inventar” el valor de ‘k’, lo vamos a deducir resolviendo las ecuaciones variacionales y ajustaremos su valor para concordancia con los experimentos.

El método variacional clásico busca “variar” la función incógnita $\Phi \rightarrow \Phi + \delta\Phi$, lo que producirá una variación en el costo total $CT \rightarrow CT + \delta CT$. Se puede visualizar como un proceso iterativo en el que se va bajando el costo hasta que se llega a un perfil óptimo Φ(x,y,z): perfil para el cual toda posible variación δΦ deja estacionario el costo (a primer orden en la variación δΦ).

$CT = \iiint \tfrac{1}{2}.k.\nabla\Phi \cdot \nabla\Phi \, dVol + \iiint \rho\Phi \, dVol$ →tomamos variación δ

$\delta CT = \iiint \tfrac{1}{2}.k. \, \delta(\nabla\Phi \cdot \nabla\Phi) \, dVol + \iiint \rho \, \delta\Phi \, dVol$ →diferencial de un producto escalar

$\delta CT = \iiint \tfrac{1}{2}.k. \, 2(\nabla\Phi \cdot \delta\nabla\Phi) \, dVol + \iiint \rho \, \delta\Phi \, dVol$ →conmutamos δ con ∇

$\delta CT = \iiint k. \, (\nabla\Phi \cdot \nabla\delta\Phi) \, dVol + \iiint \rho \, \delta\Phi \, dVol$ → divergencia de escalar*vector $\vec{}$

$\delta CT = \iiint k. \, [\nabla \cdot (\delta\Phi \, \nabla\Phi) - \delta\Phi \, \nabla \cdot (\nabla\Phi) \,] \, dVol + \iiint \rho \, \delta\Phi \, dVol$

$\delta CT = \iiint k. \, [\nabla \cdot (\delta\Phi \, \nabla\Phi) - \delta\Phi \, \nabla \cdot (\nabla\Phi) \,] dVol + \iiint \rho \, \delta\Phi \, dVol$ →laplaciano

$\delta CT = \iiint k. \, [\nabla \cdot (\delta\Phi \, \nabla\Phi) - \delta\Phi \, \nabla^2\Phi \,] dVol + \iiint \rho \, \delta\Phi \, dVol$ →factor común

$\delta CT = \iiint k. \, [\nabla \cdot (\delta\Phi \, \nabla\Phi) \,] dVol + \iiint (\rho - k\nabla^2\Phi)\delta\Phi \, dVol$

La condición de costo estacionario $\delta CT = 0 \; \forall \delta\Phi$ se cumple si se anula el factor resaltado en amarillo.
Es decir: $\rho - k\nabla^2\Phi = 0$ →Por lo tanto la constante de acomplamiento resulta ser $k = 1/(4\pi G)$.

La integral volumétrica marcada en gris se puede llevar a una integral de superficie por el teorema de Gauss.
$\iiint_{vol} k. \, [\nabla \cdot (\delta\Phi \, \nabla\Phi) \,] dVol = \iint_{sup} \delta\Phi \, \nabla\Phi \cdot \vec{n} \, dSup$
Sup=superficie que envuelve a nuestra región de estudio desde un radio “infinito” $R \rightarrow \infty$.
El perfil de potencial que optimiza la parte amarilla es el conocido de Newton.
En puntos remotos $R \rightarrow \infty$ se aproxima por el desarrollo multipolar $\Phi \approx -MG/R$, donde M=masa total, dato fijo del problema. Su gradiente es $-MG/R^2$ y su contribución a la integral del flujo es constante, no hay peligro de que nada diverja hacia $\pm\infty$. Además está el producto por δΦ, que lleva el flujo a cero.
Durante la búsqueda iterativa de potenciales Φ que resuelvan la ecuación diferencial, habrá incertidumbre en las variaciones δΦ en los alrededores de las masas. Pero no hay incertidumbre ninguna en los puntos remotos, donde esencialmente $\delta\Phi \approx 0$. Una vez que nos situamos cerca de la solución de Laplace-Poisson, la integral gris tiende a cero y ya no molesta.

<u>Ecuaciones de Euler-Lagrange</u>:
Como entrenamiento de cálculo, trataremos de resolver esto mismo mediante ecuaciones de Euler y Lagrange en espacios 3D. La función densidad lagrangeana es el integrando de la función de costo, todo lo que multiplica a dVol.
$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}.k.(\partial_x\Phi^2 + \partial_y\Phi^2 + \partial_z\Phi^2) + \rho\Phi$
Observar el parecido con el ejemplo electrostático de 11.3.2, apenas difieren en el signo de Φ.

La incógnita es Φ, la única coordenada generalizada.
Las “velocidades generalizadas” son las derivadas de Φ respecto a las coordenadas: $\partial_x\Phi$, $\partial_y\Phi$ y $\partial_z\Phi$.
Los momentos lagrangeanos son las derivadas de la densidad lagrangeana respecto a las velocidades generalizadas. Por ejemplo $P^{x\Phi} = \partial\mathcal{L} / \partial(\partial_x\Phi) = k.\partial_x\Phi$.
<u>Advertencia</u>: Estamos violando las buenas prácticas de notación tensorial de índices.
Si $P^{x\Phi}$ tiene índice elevado en el lado izquierdo, el lado derecho debería ser $\partial^x\Phi$.
En coordenadas cartesianas y en entornos “Weak Field” su valor numérico coincide $\partial_x\Phi = \partial^x\Phi$, no se nota la diferencia. De cualquier manera es deseable repetar el balance de índices y escribir:
$P^{x\Phi} = \partial\mathcal{L}/\partial(\partial_x\Phi) = k.\partial^x\Phi$ $\quad P^{y\Phi} = \partial\mathcal{L}/\partial(\partial_y\Phi) = k.\partial^y\Phi$ $\quad P^{z\Phi} = \partial\mathcal{L}/\partial(\partial_z\Phi) = k.\partial^z\Phi$
La ecuación de Euler-Lagrange para la coordenada Φ es:

$\partial_\mu P^{\mu\Phi} = \partial\mathcal{L}/\partial\Phi$ →atención que es una suma en ‘μ’ escrita en convenio de suma

$\partial_x P^{x\Phi} + \partial_y P^{y\Phi} + \partial_z P^{z\Phi} = \partial\mathcal{L}/\partial\Phi$ →calculamos $\partial\mathcal{L}/\partial\Phi$ tomando ‘ρ’ como constante.

$\partial_x P^{x\Phi} + \partial_y P^{y\Phi} + \partial_z P^{z\Phi} = \rho$ →sustituimos los momentos antes calculados

$\partial_x(k.\partial^x\Phi) + \partial_y(k.\partial^y\Phi) + \partial_z(k.\partial^z\Phi) = \rho$

$k.\partial_i(\partial^i\Phi) = \rho$ →reconocemos operador laplaciano, suma implícita en i=1,2,3

$k\nabla^2\Phi = \rho$

Evolución hacia la relatividad:

¿Cómo podemos traducir este escenario clásico hacia el lenguaje de la Relatividad?

La idea de que las partículas buscan las zonas de mínima energía potencial debería estar contenida en el principio de maximización del tiempo propio. Sin embargo, a primera vista esto parece cuestionable porque las zonas de potencial más bajo tienden a tener dilatación temporal más intensa, justo al revés de lo que supuestamente "*preferirían*" las partículas. Para una partícula aislada numerada con índice 'i', su acción es:

$dAcc_i = - m_i.c^2.\sqrt{\ }.\ d\tau_i$

La raíz es unitaria, y el radicando (también unitario) es $-g_{\alpha\beta}.U^\alpha U^\beta/c^2$.

Debemos pensar en una función de "costo colectivo", sumando todas las partículas vecinas dentro de una cierta región que ocupa un pequeño volumen dVol.

$\Sigma_i\ m_i$ →se sustituye por $\rho_{eff}.dVol$.

Para un astro en estado sólido, en equilibrio (es la configuración que buscamos) las cuadrivelocidades tendrán solo componente temporal y la dilatación temporal será únicamente la gravitatoria; es decir, valdrá $d\tau = raiz(-g_{oo}).dt$.

La acción de esa pequeña porción de materia va quedando:

$dAcc = - \rho_{eff}.dVol.c^2.\sqrt{\ }.\ \sqrt{-g_{oo}}\ dt$

Sería como la contribución al costo total, que queremos minimizar.

Podemos verlo como el negativo de la contribución a la "utilidad total", que queremos maximizar.

Estamos en una situación similar a la de un espectáculo artístico o deportivo con alta demanda. Las localidades más deseadas (baja dilatación temporal, alto Φ) se ocuparían primero, y las porciones de materia resignadas a ocupar zonas de menor Φ y mayor dilatación temporal estarían "*descontentas*" por no poder aportar lo suficiente a la utilidad global.

Es necesario distinguir una densidad efectiva diferente de la densidad propia, por ejemplo $\rho_{eff} \approx \rho + p/c^2$. Las zonas de potencial más bajo están más presurizadas, más energizadas, y eso representa un incremento de masa efectiva por concepto de $E=mc^2$. Con este incremento relativista compensamos el "*descontento*" de la materia ubicada en bajo Φ: todas las porciones aportarían en forma pareja a la utilidad global.

Por otro lado, debemos tener en cuenta que dVol es volumen métrico, contempla los coeficientes espaciales del tensor métrico.

Si fueran coordenadas cuasi-esféricas, tendríamos $dVol = raiz(g_{rr}).dr * raiz(g_{\theta\theta}).d\theta * raiz(g_{\varphi\varphi}).d\varphi$.

En términos genéricos tenemos $dVol = \sqrt{g_S}.d^3x$: el triple diferencial de coordenadas d^3x multiplicado por la raíz del determinante de la parte espacial del tensor métrico.

Si usamos coordenadas *cuasi-cartesianas* (x,y,z), $g_s = (1-2\Psi/c^2)^3$. ¿Porqué las llamamos cuasi-cartesianas? Porque nunca podrán ser puramente cartesianas euclídeas, debido a la distorsión gravitatoria.

Esto nos lleva a un diferencial de acción:

$dAcc = - \rho_{eff}\sqrt{g_s}\ d^3x.c^2.\sqrt{\ }.\ \sqrt{-g_{oo}}\ dt$ →agrupamos

$dAcc = - \rho_{eff}.c^2.\sqrt{\ }.\ \sqrt{-g_{oo}}\ \sqrt{g_s}\ dt\ d^3x$ →reconocemos determinante total

$dAcc = - \rho_{eff}.c^2.\sqrt{\ }.\ \sqrt{-g}\ dt\ d^3x$

$dAcc = - \rho_{eff}.c^2.\sqrt{\ }.\ \sqrt{-g}\ dt\ d^3x$ →y diferencial 4D de coordenadas

$$dAcc = - \rho_{eff}.c^2.\sqrt{\ }.\sqrt{-g}\ d^4x$$

Vamos bien rumbeados porque $\sqrt{-g}\ d^4x$ es el diferencial de tetravolumen, invariante relativista.

En el camino hacia una acción relativista, es bueno tener ese invariante.

También valoramos la ayuda del potencial espacial Ψ. No alcanza con que tenga un valor *débil o timorato*, inferior al Φ por un factor $p/(\rho.c^2)$ en los escenarios de campos débiles. Su valor debería ser del mismo orden de magnitud que el Φ temporal, capaz de dar vuelta completamente el signo de la variación del diferencial de acción. Con el concepto del ρ_{eff}, y contemplando el potencial $\Psi \approx \Phi \rightarrow$ las zonas de potencial bajo se vuelven más atractivas que las de potencial alto, desde el punto de vista de la minimización del costo total o maximización de la utilidad total. Se vuelven tan deseadas que generan atracción hacia las demás porciones de materia, la materia alta busca las zonas bajas y empuja, se presuriza.

Nos falta abordar el otro aspecto: cuál es el "costo métrico" del potencial Φ que se suma al costo total, para que la función Φ(x,y,z) pueda convertirse en un grado de libertad ajustable.

En el capítulo 7.4 analizábamos la cuerda elástica (1D) y la membrana elástica (2D). Ambos sistemas, en las zonas donde no había cargas apoyadas, buscaban la condición de fuerza neta nula que se correspondía con laplaciano nulo: $w''(x)=0$ en la cuerda 1D, $\partial_x^2 w+\partial_y^2 w =0$ en la membrana 2D. En las zonas en donde había masas apoyadas no tenían más remedio que resignarse a un laplaciano igual a la densidad de materia apoyada: λ=peso por unidad de longitud en 1D, σ=peso por unidad de área en el caso 2D.

Trasladamos estas ideas hacia nuestros escenarios 3D (o mejor aún 4D) y proponemos entonces el siguiente

"Costo gravitatorio" = $\iiiint k.\nabla^2\Phi.d^4Vol.$

k=constante de acoplamiento, no necesariamente la misma que al inicio de 11.3.4.

Esto explica bien el hecho clásico conocido de que el potencial busca anular su laplaciano en las zonas libres de materia. Aunque todavía no está del todo clara la forma en que se puede lograr una reducción significativa de este costo. A primera vista, esta integral depende de la masa total, un dato fijo del problema. Si el costo es esencialmente constante, no hay mucho trabajo de minimización que se pueda lograr variando nuestros grados de libertad métricos.

La primera corrección relativista que tenemos que hacer es formular el tetravolumen invariante:

$d^4Vol=\sqrt{-g}\ dt.dx.dy.dz$

En un escenario todavía semi-clásico, de campos débiles, aproximamos

$-g \approx (1+2\Phi/c^2)(1-2\Psi/c^2)^3$ →hipótesis $\Psi \approx \Phi$

$-g \approx (1+2\Phi/c^2)(1-2\Phi/c^2)^3$ →hipótesis $|\Phi| \ll c^2$

$-g \approx (1+2\Phi/c^2)(1-6\Phi/c^2)$

$-g \approx (1-4\Phi/c^2)$ $\rightarrow \sqrt{-g} \approx (1-2\Phi/c^2)$

Sustituimos en la integral del costo:

"Costo gravitatorio" = $\iiiint k.\nabla^2\Phi.d^4Vol$

"Costo gravitatorio" = $\iiiint k.\nabla^2\Phi.(1-2\Phi/c^2).dx.dy.dz.dt$

"Costo gravitatorio" = $\iiiint k.\nabla^2\Phi.dxdydzdt$ $-2k/c^2.\iiiint \Phi\nabla^2\Phi.dx.dy.dz.dt$

La parte gris tiene como integrando una divergencia de gradiente, con el Teorema de la Divergencia de Gauss se puede llevar a una integral de superficie en el infinito.

No da cero pero podemos confiar en que va a variar muy poco para distribuciones de materia acotada, ya que depende de la masa total 'M', esencialmente una constante.

Concentramos nuestro esfuerzo en la parte verde y aplicamos una de las **Identidades de Green** del Cálculo Vectorial. Se trata de identificar la divergencia de un escalar por un vector.

$\nabla\cdot(f\,\nabla\Phi) = f\,\nabla\cdot(\nabla\Phi) + \nabla f\cdot\nabla\Phi$ →caso particular f=Φ

$\nabla\cdot(\Phi\,\nabla\Phi) = \Phi\,\nabla\cdot(\nabla\Phi) + \nabla\Phi\cdot\nabla\Phi$

$\nabla\cdot(\Phi\,\nabla\Phi) = \Phi\,\nabla^2\Phi + \nabla\Phi\cdot\nabla\Phi$

$-\Phi\,\nabla^2\Phi = -\nabla\cdot(\Phi\,\nabla\Phi) + \nabla\Phi\cdot\nabla\Phi$ →sustituimos en la acción

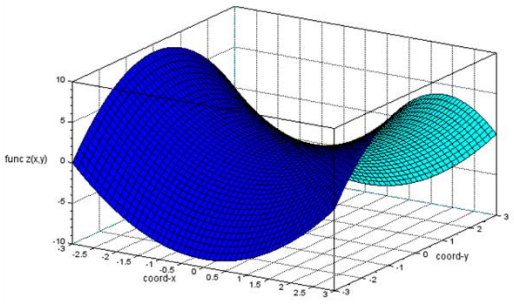
"Costo gravitatorio" = $\iiint k.\nabla^2\Phi.dxdydzdt$ $-2k/c^2.\iiint\Phi\nabla^2\Phi.dx.dy.dz.dt$
"Costo gravitatorio" = $\iiint k.\nabla^2\Phi.dxdydzdt$ $+2k/c^2.\iiint|\nabla\Phi|^2.dx.dy.dz.dt$ $-2k/c^2.\iiint\nabla\cdot(\Phi\nabla\Phi).dx.dy.dz.dt$

El término rojo nos lo podemos quitar de encima convirtiéndolo a integral de superficie en el infinito.
$\Phi\rightarrow 0$ en el infinito, y $\nabla\Phi$ está acotado, por lo tanto esta integral no aporta a la acción.
El aporte gris lo pospusimos por ser constante, pero este aporte rojo lo eliminamos por ser nulo.

Entonces el costo gravitatorio efectivo, el que más contribuye al costo total, es el verde: la integral del módulo del gradiente al cuadrado.
Al sumar "costo gravitatorio" + "costo de la materia", tenemos exactamente el mismo problema matemático que resolvimos en el primer acercamiento clásico. La solución es $\nabla^2\,\Phi = 4\pi G\,\rho_{eff}$.
Este efecto relativista del $\rho_{eff}>\rho$ por la presurización nos advierte que el problema todavía no está totalmente resuelto. El término gris, que momentáneamente ignoramos, depende entonces de la "M efectiva", que es superior a la 'M' total. O sea que no es una constante, todavía se precisa algún paso más de iteración.

No continuamos con estos cálculos porque de cualquier manera tenemos la precisión comprometida por varias aproximaciones semi-clásicas válidas para campos débiles.
Apuntamos a un tratamiento cada vez más relativista y exacto.
Aún así, formulamos una advertencia: al manejar funcionales con múltiples grados de libertad, *puede ser que en algunas ocasiones no encontremos un punto de acción mínima.*
Podemos encontrarnos con un "punto silla", en inglés "*saddle point*", que se visualizaría gráficamente como en la siguiente figura:

```
dx=.12; x=-3:dx:3; y=x; n=length(x);
z=x*y';
for ii=1:n;for jj=1:n;
   z(ii,jj)=x(ii)^2 - y(jj)^2 ;
end;end;
plot3d(x,y,z); xgrid; ylabel('coord-y');
xlabel('coord-x'); zlabel('func z(x,y)');
```



En este ejemplo de la función $z(x,y)=x^2-y^2$, uno de los grados de libertad 'x' produce un mínimo en el origen, mientras que otro grado de libertad 'y' produce un máximo.

El panorama general es el siguiente:

- Las magnitudes físicas siguen leyes de evolución, que en ciertas ocasiones se pueden interpretar como las resultantes de minimizar un costo o maximizar una utilidad.
- En los casos en que no hay máximo ni mínimo puro, falla la interpretación. De cualquier manera lo que está asegurado es el carácter estacionario de la acción: los grados de libertad se organizan en una configuración que satisface la ecuación diferencial contextual al problema físico y que deja la acción ESTACIONARIA a primer orden en las variaciones.

11.3.5 Lagrangeano gravitatorio, acción de Hilbert:

En los problemas relativistas generales (es decir, en la Relatividad General), las incógnitas a resolver son los componentes del tensor métrico $g^{\alpha\beta}$. Esas van a ser entonces nuestras coordenadas generalizadas, 16 en total. Vemos cómo la complejidad va aumentando 3x1→4x4→16x4.

Área de la ciencia	#incógnitas	#variables independientes
Mecánica clásica	3	1
Electromagnetismo	4	4
Gravitación	16	4

En la sección anterior solo nos concentrábamos en la diagonal g^{oo} g^{xx} g^{yy} g^{zz}, y simplificábamos el problema asumiendo isotropía en la parte espacial. Y además agregábamos la condición $\Psi=\Phi$ (válida solo para campos débiles). Ahora apuntamos a un tratamiento general con 16 grados de libertad.
Precisamos otro "salto cualitativo": desprendernos del laplaciano clásico.
Nuestro "costo gravitatorio" pasará a llamarse "costo métrico". No puede tener más al $\nabla^2\Phi$, porque ahora Φ es solo 1 de las 16 incógnitas, la que está contenida en g^{oo}. Y el operador laplaciano no es compatible con el Principio de Covarianza. Precisamos un escalar invariante que dependa del tensor métrico completo y que describa mejor a la curvatura, y nuestro mejor candidato es el **escalar de Ricci** (ya vimos en el capítulo 9 su identificación con el laplaciano en los escenarios "W.F.L").
Con el escalar de Ricci continuamos en forma lógica los escenarios vistos en este capítulo 11.3, donde los lagrangeanos contenían invariantes relativistas acordes con el contexto:

11.3.1)→ en Mecánica de partículas era el tiempo propio 'τ', escalado para dar unidades de energía
11.3.2)→ en Electromagnetismo era un factor de escala multiplicando a $Y= -F_{\alpha\beta}.F^{\alpha\beta}$

La acción relativista de la Gravitación va a ser una integral volumétrica en un tetra-volumen, y el determinante $\sqrt{-g}$ va a ser un factor que acompañe a la densidad lagrangeana.

Acción gravitatoria="Costo métrico" + "Acción material".

Costo métrico = $\iiiint$ K.R.$\sqrt{-g}$. d^4x ($\iiiint$ K.R. $\sqrt{-g}$. dt.dx.dy.dz en coordenadas cuasi-cartesianas)

K=constante de acoplamiento para llevar todo a unidades de acción = energía x tiempo

Las variables independientes son 4: ct,x,y,z,
y de ellas dependen las coordenadas generalizadas $g^{\alpha\beta}(t,x,y,z) = g^{\alpha\beta}(X^\sigma)$.
Si continuáramos con la línea de 11.3.1 hasta 11.3.3, las ecuaciones variacionales (que deberán coincidir con las ecuaciones de campo de Einstein) impondrían una condición para cada coordenada generalizada:

$$\partial_\mu [\partial\mathcal{L}/\partial U_\mu^{\alpha\beta}]=\partial\mathcal{L}/\partial g^{\alpha\beta}$$

¿Quiénes serían las "velocidades generalizadas" $U_\mu^{\alpha\beta}=\partial_\mu g^{\alpha\beta}$? Las derivadas de la métrica aparecen en los símbolos de Christoffel, y con orden cuadrático en el tensor de Riemann (donde hay producto de Christoffel). Esto se mantiene durante las contracciones para construir el tensor de Ricci y el escalar de Ricci, lo que refuerza que 'R' es un buen candidato a formar parte de la acción gravitatoria.
Sin embargo, las derivadas de la métrica se presentan como $\partial_\mu g_{\alpha\beta}$ en los Christoffel; no aparecen con la varianza exacta que requeriría el problema.

Otra dificultad adicional surge por los términos del Riemann basados en las derivadas de los coeficientes de Christoffel: estos involucran derivadas segundas de las coordenadas generalizadas, algo que no aparecía en las anteriores formulaciones lagrangeanas de la Mecánica y el Electromagnetismo.
Estas dificultades nos motivan a cambiar levemente el enfoque que veníamos utilizando al inicio de este capítulo 11.3. Tomaremos variaciones de la acción variando cada término del integrando, pero tratando de prescindir dentro de lo posible de las velocidades generalizadas.

La acción gravitatoria se llama acción de Hilbert en honor al matemático alemán David Hilbert, que en conjunto con Einstein la trabajó durante el año 1915 en la Universidad de Göttingen.

$Acc=\iiiint \mathcal{L}\sqrt{-g}.\, d^4x$ →su integrando es la densidad lagrangeana $\mathcal{L}$

$\mathcal{L}= \mathcal{L}_{métrica} + \mathcal{L}_{material}$

- $\mathcal{L}_{métrica}$=K.R nos conducirá a las ecuaciones de campo de vacío $R_{\alpha\beta} - R/2.g_{\alpha\beta} = 0$.
  capítulo 11.4.5

- $\mathcal{L}_{material}$=veremos su relación con el tensor de energía-impulso en las zonas donde hay materia-energía.
  capítulo 11.4.6

K=constante de acoplamiento entre los dos aportes. Deberá ajustarse para producir las ecuaciones conocidas de Newton en los límites de campos débiles, y las de Einstein en los casos generales.

Advertencia: En distintos materiales consultados observamos que no hay una uniformidad de criterio para definir qué es lo que se llama "densidad lagrangeana". La duda es si *contiene o no al factor* $\sqrt{-g}$.
Para evitar confusiones trataremos, dentro de lo posible, de escribir siempre la integral de acción de manera que quede claro quién es $\mathcal{L}$.

→Alternativa-1: $Acc=\iiiint \mathcal{L}.d^4x$ $\mathcal{L}$ ya contiene a la raíz del determinante métrico

→Alternativa-2: $Acc=\iiiint \mathcal{L}\sqrt{-g}.\, d^4x$ la raíz va fuera del $\mathcal{L}$.

Reflexión: Toda integral definida precisa un dominio de integración, y aquí no lo estamos especificando.
Si la acción se integra en TODO el volumen del Universo y en todo el intervalo de tiempo 't' (desde el inicio del mundo hasta el fin del mundo), puede haber un problema de infinito.
Lo habitual es restringirnos a configuraciones de materia acotada y a intervalos espaciotemporales finitos como X_{min},X_{max},T_{min},T_{max}…etc. El tamaño se elige contextual a cada situación. Por ejemplo, para un astro de radio R_a se eligen dimensiones mucho mayores $X_{max} \gg R_a$.
Lo importante es llegar a las ecuaciones de campo, que darán lo esperado siempre que se cuide el problema de los infinitos.

11.4 Ecuaciones variacionales.

Acabamos de presentar de manera un poco informal la parte de la acción asociada a la presencia de materia. En la parte dependiente de la curvatura podemos profundizar el rigor para demostrar las ecuaciones de campo de vacío.

$Acc = K\iiint\!\!\iint R.\sqrt{-g}.cdt.dx.dy.dz$ ←acción de vacío, en ausencia de materia

$\delta Acc = K.\ \iiint\!\!\iint[\ \delta R.\sqrt{-g} + R.\delta\sqrt{-g}].cdt.dx.dy.dz$

Las reglas para tomar variaciones son muy similares a las de los diferenciales.
La variación del integrando aporta dos sumandos, uno por la variación del determinante y otro por la variación del escalar de Ricci.

11.4.1 Variación del determinante 'g':

Veamos el ejemplo de cómo varía el determinante del tensor métrico frente a una perturbación en algún casillero arbitrario, por ejemplo δg_{y0}.

[g]=

$$\begin{bmatrix} g_{00} & g_{0x} & g_{0y} & g_{0z} \\ g_{x0} & g_{xx} & g_{xy} & g_{xz} \\ g_{y0}+\delta g_{y0} & g_{yx} & g_{yy} & g_{yz} \\ g_{z0} & g_{zx} & g_{zy} & g_{zz} \end{bmatrix}$$

Desarrollando por la columna-0, el determinante da:

$g = g_{00}.Adj[0,0] + g_{x0}.Adj[x,0] + (g_{y0}+\delta g_{y0}).Adj[y,0] + g_{z0}.Adj[z,0]$

$g = g_{00}.Adj[0,0]+g_{x0}.Adj[x,0]+g_{y0}.Adj[y,0]+g_{z0}.Adj[z,0] +\delta g_{y0}.Adj[y,0]$

$g = g_{s.p.} +\delta g_{y0}.Adj[y,0]$

$g_{s.p.}$ = g sin perturbar, $g - g_{s.p.} = \delta g$ = perturbación

$\delta g = \delta g_{y0}.Adj[y,0]$

$\delta g/\delta g_{y0} = Adj[y,0]$ → $\partial g/\partial g_{y0} = Adj[y,0]$

El cociente de perturbaciones, cuando se varía de a un coeficiente métrico por vez, es como una derivada parcial.

Por otro lado: los adjuntos como el Adj[y,0] aparecen en la fórmula de inversión matricial que permite calcular en forma explícita los coeficientes del tensor dual:

$g^{0y} = Adj[y,0]/det(g)$

Si sustituimos en la derivada parcial, tenemos: $\partial g/\partial g_{y0} = g.g^{0y}$
Podemos repetir este razonamiento para cualquier casillero genérico α,β y llegamos a:
$\partial g/\partial g_{\alpha\beta} = g.g^{\beta\alpha}$
Luego aplicamos la regla de la cadena para función de múltiples variables:

$\delta g = \partial g/\partial g_{\alpha\beta}.\delta g_{\alpha\beta}$ →hay implícita una suma de 16 términos en α,β

$\delta g = g.g^{\beta\alpha}.\delta g_{\alpha\beta}$

Operando un poco más:

$g_{\alpha\beta}g^{\beta\alpha} = 4$ = traza de la matriz= constante →variación nula

$\delta(g_{\alpha\beta}g^{\beta\alpha}) = 0$ = aplicamos variación del producto

$\delta(g_{\alpha\beta}).g^{\beta\alpha} + g_{\alpha\beta}.\delta(g^{\beta\alpha}) = 0$

$\delta(g_{\alpha\beta}).g^{\beta\alpha} = -\ g_{\alpha\beta}.\delta(g^{\beta\alpha})$

$\delta g = -g.g_{\beta\alpha}.\delta g^{\alpha\beta}$

Raíz del determinante 'g':

$\delta\sqrt{-g} = 1/(2\sqrt{-g}).\delta(-g)$ →sustituimos resultado reciente

$\delta\sqrt{-g} = 1/(2\sqrt{-g}).g.g_{\beta\alpha}.\delta g^{\alpha\beta}$

$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\,.\,(-g)/(\sqrt{-g}).g_{\beta\alpha}.\delta g^{\alpha\beta}$

$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\,.\sqrt{-g}.g_{\beta\alpha}.\delta g^{\alpha\beta}$

11.4.2 Variación del escalar de Ricci:

$R^{\mu}{}_{\beta} = g^{\mu\alpha}.R_{\alpha\beta}$ →contracción $\mu=\beta$

$R = R^{\beta}{}_{\beta} = g^{\beta\alpha}.R_{\alpha\beta}$ →simetría

$R = g^{\alpha\beta}.R_{\alpha\beta}$ →variación de un producto

$\delta R = \delta g^{\alpha\beta}.R_{\alpha\beta} + g^{\alpha\beta}.\delta R_{\alpha\beta}$

$\delta R = \delta g^{\alpha\beta}.R_{\alpha\beta} + \text{extras}$

El segundo término de variación lo llamamos 'extras' y lo analizamos a continuación.

11.4.3 Variación del tensor de Riemann:

Para seguirles el rastro a las variaciones del tensor de Ricci hay que retroceder hasta sus orígenes, antes de su contracción.

$R^{\lambda}{}_{\mu\alpha\beta} = \partial_\alpha\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\beta} - \partial_\beta\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\alpha} + \Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\alpha}.\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\beta} - \Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\beta}.\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\alpha}$ →variamos

$\delta R^{\lambda}{}_{\mu\alpha\beta} = \partial_\alpha\,\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\beta} - \partial_\beta\,\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\alpha} + \delta\Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\alpha}.\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\beta} + \Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\alpha}.\delta\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\beta} - \delta\Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\beta}.\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\alpha} - \Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\beta}.\delta\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\alpha}$

$\delta R^{\lambda}{}_{\mu\alpha\beta} = \partial_\alpha\,\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\beta} - \partial_\beta\,\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\alpha} + \delta\Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\alpha}.\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\beta} + \Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\alpha}.\delta\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\beta} - \delta\Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\beta}.\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\alpha} - \Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\beta}.\delta\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\alpha}$ →agrupamos

$\delta R^{\lambda}{}_{\mu\alpha\beta} = \text{violeta} - \text{gris}$

violeta $= \partial_\alpha\,\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\beta} + \Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\alpha}.\delta\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\beta} - \delta\Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\beta}.\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\alpha}$

Le falta un término $-\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\sigma}.\Gamma^{\sigma}{}_{\alpha\beta}$ para convertirse en $\nabla_\alpha\,\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\beta}$

gris $= \partial_\beta\,\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\alpha} + \Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\beta}.\delta\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\alpha} - \delta\Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\alpha}.\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\beta}$

Le falta un término $-\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\sigma}.\Gamma^{\sigma}{}_{\alpha\beta}$ para convertirse en $\nabla_\beta\,\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\alpha}$

Ejercicio: Repasar las fórmulas de derivada covariante de un tensor de varios índices, enunciadas en 8.4.6

El término que hay que sumar al violeta es el mismo que el que se suma al gris, y se cancelan al restar. Queda entonces:

$\delta R^{\lambda}{}_{\mu\alpha\beta} = \nabla_\alpha\,\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\beta} - \nabla_\beta\,\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\alpha}$

$\delta R^{\lambda}{}_{\mu\alpha\beta} = \nabla_\alpha\,\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\beta} - \nabla_\beta\,\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\alpha}$

Propuesta de actividad: Los símbolos de Christoffel *no son tensores*, lo que implica que no tiene sentido para ellos la fórmula de derivada covariante de un tensor. Pero *las variaciones de Christoffel sí son tensores*, y para ellos sí tiene sentido la expresión que acabamos de formular. Se sugiere realizar el ejercicio de investigar tal carácter tensorial o no tensorial, estudiando cómo se transforman las cantidades durante un cambio de coordenadas (por comodidad puede convenir pasar a un conjunto de coordenadas inerciales donde los Christoffel se anulan). Al final de este capítulo (sección 11.4.7) incluimos un anexo con algunas guías sobre la demostración de este resultado. Luego complementaremos en el capítulo 15.

11.4.4 Variación del tensor de Ricci

En la fórmula de variación del Riemann, contraemos $\lambda=\alpha$ para llegar a:

$\delta R_{\mu\beta} = \delta R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\beta} = \nabla_\alpha\,\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta} - \nabla_\beta\,\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\alpha}$

¿Qué contribución aportan estas variaciones a la integral de acción?

$\delta Acc = K.\iiiint[\, g^{\mu\beta}.\delta R_{\mu\beta}.\sqrt{-g}].cdt.dx.dy.dz$ →sustituimos

$\delta Acc = K.\iiiint[\, g^{\mu\beta}.[\nabla_\alpha\,\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta} - \nabla_\beta\,\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\alpha}].\sqrt{-g}].cdt.dx.dy.dz$

Recordamos la propiedad $\nabla_\alpha g^{\mu\beta}=0$ que nos permite meter la métrica dentro de la derivada covariante.

$$\delta Acc = K.\iiint\int[\nabla_\alpha(g^{\mu\beta}.\delta\Gamma^\alpha{}_{\mu\beta}) - \nabla_\beta(g^{\mu\beta}.\delta\Gamma^\alpha{}_{\mu\alpha})].\sqrt{-g}].cdt.dx.dy.dz$$

$$\delta Acc = K.\iiint\int[\nabla_\alpha(A^\alpha) - \nabla_\beta(B^\beta)].\sqrt{-g}].cdt.dx.dy.dz$$

→$g^{\mu\beta}.\delta\Gamma^\alpha{}_{\mu\beta}$ es el resultado de una contracción donde desaparecen los índices *dummy* μ,β y queda un vector A^α contravariante.

→Igualmente, $g^{\mu\beta}.\delta\Gamma^\alpha{}_{\mu\alpha}$ es el resultado de una contracción donde desaparecen los índices *dummy* μ,α y queda un vector B^β contravariante.

$$\delta Acc = K.\iiint\int[\nabla_\alpha(A^\alpha) - \nabla_\beta(B^\beta)].\sqrt{-g}].cdt.dx.dy.dz$$

Por la fórmula 9.2.1, las derivadas covariantes se expresan en términos de la raíz del determinante métrico.

$$\sqrt{-g}.\nabla_\alpha(A^\alpha) = \partial_\alpha(\sqrt{-g}A^\alpha) \qquad \sqrt{-g}.\nabla_\beta(B^\beta) = \partial_\beta(\sqrt{-g}B^\beta)$$

Se simplifica entonces el aporte a la integral de acción.

$$\delta Acc = K.\iiint\int[\partial_\alpha(\sqrt{-g}A^\alpha) - \partial_\beta(\sqrt{-g}B^\beta)].cdt.dx.dy.dz$$

Tenemos entonces una integral volumétrica de una *divergencia coordenada exacta*.

La extensión a 4 dimensiones del Teorema de la Divergencia de Gauss-Stokes indica que esta integral coincide con un flujo vectorial en la hipersuperficie límite que envuelve desde el infinito la región de estudio.

Los vectores A^α y B^β están construidos en base a *variaciones*. Si la configuración de energía que estamos estudiando es limitada y la métrica lejana se puede aproximar como la de Minkowski (asintóticamente plana), entonces estas variaciones tienden a cero en el infinito, los flujos no aportan a la integral de acción. Este razonamiento podría tener objeciones a una escala cosmológica, donde "*no sabemos*" realmente qué configuraciones de materia hay en el infinito que nos envuelve.

11.4.5 Variación de la acción:

Sustituimos ahora todas las variaciones parciales recién calculadas:

$$\delta Acc = K.\iiint\int[\ \delta R.\sqrt{-g} + R.\delta\sqrt{-g}].cdt.dx.dy.dz$$

$$\delta Acc = K.\iiint\int[\ (\delta g^{\alpha\beta}.R_{\alpha\beta}+extras).\sqrt{-g} + R.\delta\sqrt{-g}].cdt.dx.dy.dz$$

$$\delta Acc = K.\iiint\int[\ (\delta g^{\alpha\beta}.R_{\alpha\beta}+extras).\sqrt{-g} + R.\delta\sqrt{-g}].cdt.dx.dy.dz$$

$$\delta Acc = K.\iiint\int[\ (\delta g^{\alpha\beta}.R_{\alpha\beta}+extras).\sqrt{-g} + R.(-½).\sqrt{-g}.g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta}].cdt.dx.dy.dz$$

Factor común:

$$\delta Acc = K.\iiint\int[\ (\delta g^{\alpha\beta}.R_{\alpha\beta}+extras).\sqrt{-g} + R.(-½).\sqrt{-g}.g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta}].cdt.dx.dy.dz$$

$$\delta Acc = K.\iiint\int\ \delta g^{\alpha\beta}.[\ R_{\alpha\beta}+extras + R.(-½).g_{\alpha\beta}].\sqrt{-g}.cdt.dx.dy.dz$$

$$\delta Acc = K.\iiint\int\ \delta g^{\alpha\beta}.[\ R_{\alpha\beta} - R/2.g_{\alpha\beta}].\sqrt{-g}.cdt.dx.dy.dz + K.\iiint\int\ \delta g^{\alpha\beta}.extras.\sqrt{-g}.cdt.dx.dy.dz$$

La integral basada en los "extras" se anula al integrar en el tetravolumen completo, ya lo demostramos con cierta dificultad en la sección anterior.

Nos concentramos ahora en la parte nueva que es más sencilla de intepretar y de calcular:

$$\delta Acc = K.\iiint\int\ \delta g^{\alpha\beta}.[R_{\alpha\beta} - R/2.g_{\alpha\beta}].\sqrt{-g}.cdt.dx.dy.dz$$

La esencia de los principios de mínima acción es encontrar las funciones incógnitas tales que la acción queda estacionaria a primer orden para cualquier perturbación arbitraria $\forall\delta g^{\alpha\beta}\ \forall\alpha\ \forall\beta$.

Lo cual se logra anulando la parte resaltada $R_{\alpha\beta} - R/2.g_{\alpha\beta} = 0$

Observación: Parece redundante porque en vacío $R_{\alpha\beta}=0$ ya contempla indirectamente R=0, pero es interesante observar que de cualquier manera 'R' aparece explícitamente en las ecuaciones variacionales. Porque luego se va a precisar para cuando se acople con el aporte de las fuentes materiales, y la ecuación resultante cumplirá la conservación del momento y de la energía.

11.4.6 Acción de la materia, ejemplos:

Acabamos de calcular la variación de la acción métrica:

$$Acc=\iiiint (\mathcal{L}_{métrica} + \mathcal{L}_m)\sqrt{-g}.\ d^4x$$

$$\delta Acc= \iiiint \delta g^{\alpha\beta}.[\ R_{\alpha\beta} - R/2.g_{\alpha\beta}].K.\sqrt{-g}.d^4x + \iiiint \delta\ (\mathcal{L}_m\sqrt{-g})\ d^4x$$

La variación de la acción material tiene que conducir al tensor de energía-impulso.

$$\delta Acc_{material}= \iiiint \delta\ (\mathcal{L}_m\sqrt{-g})\ d^4x \qquad \rightarrow \text{regla de la cadena}$$

$$\delta Acc_{material}= \iiiint (\partial(\mathcal{L}_m\sqrt{-g})/\partial g^{\alpha\beta}).\delta g^{\alpha\beta}\ d^4x = factor*\iiiint T_{\alpha\beta}\ \delta g^{\alpha\beta}\ \sqrt{-g}\ d^4x$$

Salvo un factor de escala por ahora incógnito, debe cumplirse → $\sqrt{-g}\ .T_{\alpha\beta}$ proporcional a $\partial(\mathcal{L}_m\sqrt{-g})/\partial g^{\alpha\beta}$.

Trataremos de visualizarlo en algunos escenarios particulares, por ejemplo: campos electromagnéticos, polvo cósmico y materia presurizada.

Campos electromagnéticos:

Consideramos un Universo esencialmente vacío, salvo por la presencia de radiación electromagnética.
La materia es muy escasa, está cargada eléctricamente y se concentra en una pequeña región del espacio.
Ignoramos por el momento la contribución gravitatoria de las masas y tratamos de concentrarnos en los aportes provenientes de la energía electromagnética (que llena todo el vacío, porque incluso en regiones donde no hay materia siempre habrá una densidad energética $u_{em}= ½.[\epsilon_0.E^2 + B^2/\mu_0]$).

$$Acc_{EM}= \iiiint [-1/(4\mu_o)F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} + A_\alpha J^\alpha]\ \sqrt{-g}\ d^4x$$

Repetimos la densidad lagrangeana de 11.3.3. En aquella ocasión variábamos respecto a los potenciales A_α y obteníamos las ecuaciones de Maxwell en espacio curvo.
Ahora variaremos respecto a la métrica inversa $g^{\alpha\beta}$.
¿En qué repercute usar la métrica directa o inversa?
En nuestro caso, los campos y potenciales eléctricos son dados, y sus componentes con índices bajos ($F_{\alpha\beta}$ A_α) son insensibles a variaciones $\delta g^{\alpha\beta}$. Quien pueden variar son las contravariantes luego de subir índices.
El cuadrivector carga-corriente J^α aparece con índice elevado y podríamos pensar que se vería afectado por la operación $J^\alpha=g^{\alpha\lambda}J_\lambda$, pero se considera fijo y no se varía (en 11.3.2 y 11.3.3 lo tratábamos así).
Tenemos entonces:

$$Acc_{EM}= \iiiint [-1/(4\mu_o)F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} + A_\alpha J^\alpha]\ \sqrt{-g}\ d^4x$$

$$\delta Acc_{EM}= \iiiint [-1/(4\mu_o)F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}]\ \delta\sqrt{-g}\ d^4x + \iiiint [-1/(4\mu_o)F_{\alpha\beta}\delta F^{\alpha\beta}]\ \sqrt{-g}\ d^4x$$

$$\delta Acc_{EM}= \mathbf{(T1)} + \mathbf{(T2)}$$

Para el término $(T1) = \iiiint [-1/(4\mu_o)F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}]\ \delta\sqrt{-g}\ d^4x$, precisamos recurrir a varios resultados previos.
Por un lado, recordar el tensor auxiliar definido en 5.6.5 $Y_\alpha{}^\beta = F_{\alpha\sigma}F^{\sigma\beta}$, cuya traza era $Y= Y_\alpha{}^\alpha = F_{\alpha\sigma}F^{\sigma\alpha}$.
Por virtud de la antisimetría $F^{\sigma\alpha}= -F^{\alpha\sigma}$, tenemos entonces que la traza Y es el negativo del invariante electromagnético. $-Y= F_{\alpha\sigma}F^{\alpha\sigma}$
También necesitamos el resultado de 11.4.1 $\delta\sqrt{-g}= -½\ .\sqrt{-g}.g_{\beta\alpha}.\delta g^{\alpha\beta}$.
Sustituimos:

$$(T1)= \iiiint [-1/(4\mu_o)F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}]\ (-½\ .\sqrt{-g}.g_{\beta\alpha}.\delta g^{\alpha\beta})\ d^4x$$

Alerta: Estamos violando las buenas reglas de notación tensorial. Los índices α y β ya está sumados, no pueden volver a aparecer en otra suma. Una de las dos parejas αβ debemos cambiarlas por λμ.

$$(T1) = \iiiint [-1/(4\mu_o)F_{\lambda\mu}F^{\lambda\mu}]\ \delta\sqrt{-g}\ d^4x$$

$$(T1) = \iiiint [-1/(4\mu_o)(-Y)]\ (-½\ .\sqrt{-g}.g_{\alpha\beta}.\delta g^{\alpha\beta})\ d^4x$$

$$\mathbf{(T1) = -½.\iiiint [1/\mu_o.(Y/4.g_{\alpha\beta})]\ (\sqrt{-g}.\ \delta g^{\alpha\beta})\ d^4x}$$

Para el término (T2), recordamos que $F^{\alpha\beta}$ se obtiene multiplicando 2 veces por el tensor dual, y debemos escribir en forma explícita ambos factores para poder variarlos a los dos.

$F^{\alpha\beta}= g^{\alpha\lambda}F_{\lambda\mu}g^{\mu\beta}$

$F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}= F_{\alpha\beta}\, g^{\alpha\lambda}F_{\lambda\mu}g^{\mu\beta}$ →tomamos variación solo de la métrica

$\delta(F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta})= F_{\alpha\beta}\,\delta g^{\alpha\lambda}F_{\lambda\mu}g^{\mu\beta} + F_{\alpha\beta}\, g^{\alpha\lambda}F_{\lambda\mu}\,\delta g^{\mu\beta}$ (los componentes de índice bajo no se varían)

$\delta(F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta})=$ (T2-S1) + (T2-S2)

Operamos por turnos:

(T2-S1) = $F_{\alpha\beta}\,\delta g^{\alpha\lambda}F_{\lambda\mu}g^{\mu\beta}$ →antisimetría

(T2-S1) = $-F_{\beta\alpha}\,\delta g^{\alpha\lambda}F_{\lambda\mu}g^{\mu\beta x}$

(T2-S1) = $-g^{\mu\beta}F_{\beta\alpha}\,\delta g^{\alpha\lambda}F_{\lambda\mu}$ →subimos índice y formamos tensor mixto $F^{\mu}{}_{\alpha}$

(T2-S1) = $-F^{\mu}{}_{\alpha}\,\delta g^{\alpha\lambda}F_{\lambda\mu}$

(T2-S1) = $-F_{\lambda\mu}F^{\mu}{}_{\alpha}\,\delta g^{\alpha\lambda}$ →tensor auxiliar $F_{\lambda\alpha}$

(T2-S1) = $-Y_{\lambda\alpha}\,\delta g^{\alpha\lambda}$

(T2-S2) = $F_{\alpha\beta}\, g^{\alpha\lambda}F_{\lambda\mu}\,\delta g^{\mu\beta}$ →subimos un índice

(T2-S2) = $F_{\alpha\beta}\, F^{\alpha}{}_{\mu}\,\delta g^{\mu\beta}$

(T2-S2) = $F_{\alpha\beta}\, F^{\alpha}{}_{\mu}\,\delta g^{\mu\beta}$ →antisimetría

(T2-S2) = $-F_{\beta\alpha}\, F^{\alpha}{}_{\mu}\,\delta g^{\mu\beta}$

(T2-S2) = $-F_{\beta\alpha}\, F^{\alpha}{}_{\mu}\,\delta g^{\mu\beta}$ →tensor auxiliar $F_{\beta\mu}$

(T2-S2) = $-Y_{\beta\mu}\,\delta g^{\mu\beta}$

(T2-S1)=(T2-S2), porque ambos son una suma doble basada en tensores Y, g simétricos en su forma covariante.

Los índices son *dummy*, se pueden renombrar.

Entonces $F_{\alpha\beta}\,\delta F^{\alpha\beta}= -2Y_{\alpha\beta}\,\delta g^{\alpha\beta}$. Sustituimos en el término (T2).

(T2)=$\iiiint [-1/(4\mu_o)F_{\alpha\beta}\delta F^{\alpha\beta}]\ \sqrt{-g}\ d^4x$

(T2)=$\iiiint [-1/(4\mu_o)(-2Y_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta})]\ \sqrt{-g}\ d^4x$

(T2)= ½ $\iiiint$ $[1/(\mu_o)(Y_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta})]\ \sqrt{-g}\ d^4x$

Ya estamos en condiciones de calcular la variación de la acción.

$\delta Acc_{EM}=$ **(T1) + (T2)**

$\delta Acc_{EM}= -½.\iiiint [1/\mu_o.(Y/4.g_{\alpha\beta})]\ (\sqrt{-g}.\ \delta g^{\alpha\beta})\ d^4x + ½ \iiiint [1/(\mu_o)(Y_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta})]\ \sqrt{-g}\ d^4x$

$\delta Acc_{EM}= ½.\iiiint [1/\mu_o.(\ Y_{\alpha\beta}-Y/4.g_{\alpha\beta})]\ (\sqrt{-g}.\ \delta g^{\alpha\beta})\ d^4x$

Reconocemos el tensor de energía-impulso electromagnético definido en 10.3.3 (atención al signo!):

$T_{\alpha\beta(EM)}= -1/\mu_o.(\ Y_{\alpha\beta}-Y/4.g_{\alpha\beta})$

$\delta Acc_{EM}= ½.\iiiint [-T_{\alpha\beta}]\ (\sqrt{-g}.\ \delta g^{\alpha\beta})\ d^4x$

Este resuelve el factor de escala que estamos buscando para el acoplamiento entre la gravedad y la energía.

Tenemos: $Acc=Acc_{grav} + Acc_{EM}$

$\delta Acc=\delta Acc_{grav} + \delta Acc_{EM}$

$\delta Acc_{grav} = K.\iiiint \delta g^{\alpha\beta}.[R_{\alpha\beta} -R/2.g_{\alpha\beta}].\sqrt{-g}.\ d^4x$ calculada en 11.4.5

$\delta Acc_{EM}= ½.\iiiint [-T_{\alpha\beta}]\ (\sqrt{-g}.\ \delta g^{\alpha\beta})\ d^4x$ calculada hace unas líneas

→Juntamos $\delta Acc_{grav} = \iiiint \delta g^{\alpha\beta}.[KR_{\alpha\beta} -KR/2.g_{\alpha\beta}-½T_{\alpha\beta}].\sqrt{-g}.\ d^4x$

Esto es consistente con el ajuste $K=c^4/(16\pi G)$.

Polvo cósmico:
Comenzamos con una advertencia: estuvimos consultando varias fuentes y confirmamos que la solución exacta escapa al nivel planteado como objetivo en este trabajo. Una de las complicaciones es la necesidad de incluir en la acción multiplicadores de Lagrange que aseguren la conservación del número de partículas y otras condiciones.
Nos conformaremos con una línea de argumentación basada en conceptos similares a los de 11.3.4.
Los resultados serán válidos solamente para entornos de campos débiles (W.F.L). Pero no nos preocupa porque lo único que nos interesa es entender que nuestro $T_{\alpha\beta}$ del capítulo 10 aparece al variar la acción de la materia. Una vez que lo visualicemos, sabemos que la ecuación de campo exacta surgirá al combinar ambas variaciones de Einstein Hilbert $\rightarrow R_{\alpha\beta} - R/2.g_{\alpha\beta} - 8\pi G/c^4.T_{\alpha\beta} = 0$

Partimos todo el espaciotiempo en "hipercubos" $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta t$ alrededor de cada evento (x,y,z,t).
Todos los Δ son iguales para cada evento, son un dato del problema que se elige con los siguientes criterios:

- El tamaño de la región debe ser suficientemente grande como para contener muchas partículas, tal que se pueda definir una densidad volumétrica local. Eso permitirá hacer un pasaje efectivo de un escenario discreto "Σ_i" a un escenario continuo "$\int$".
- Por otro lado, el tamaño debe ser suficientemente reducido como para que la densidad y la métrica no varíen en forma apreciable dentro de esa región ni respecto a regiones vecinas.

Numeramos con índice i=1,2,….etc N a todas las partículas de polvo asociadas a un cierto "hipercubo" en el que centramos el análisis.
¿Cómo resolvemos el problema de los flujos entre cubos vecinos?
Decidimos cuáles partículas pertenecen a nuestro hipercubo según sus coordenadas en tiempo=t. Si luego en tiempo=t+Δt se escaparon de la región no importa. Con igual criterio, si alguna partícula vecina entró a nuestra región en el intervalo (t,t+Δt) no la contamos aquí, porque ya fue contada en su correspondiente cubículo del cual provino.

A cada porción de polvo le corresponde un aporte a la acción:

$$\Delta Acc = -\Sigma_i m_i.c^2.\Delta\tau_i$$

Introducimos la hipótesis de que hay una única cuadri-velocidad representativa de toda la región, lo que es equivalente a asumir que todas las partículas de polvo viajan esencialmente a igual velocidad que sus compañeras de cubículo. Esta hipótesis es necesaria para reducir el riesgo de que haya choques entre partículas, porque si fuera así se perderían las propiedades que definen al polvo: "*partículas aisladas que solo interaccionan gravitacionalmente*".
También haremos la hipótesis de campos débiles y bajas velocidades, bajo el supuesto de que mayores niveles de energía contribuirían a interacciones físicas no compatibles con el modelo de polvo.

→Entonces escribimos $\Sigma_i m_i = \Delta M$
Atención que esto es una cantidad constante de masa que no puede variar.
Puede ser diferente entre un punto y otro del espacio. Y para el mismo punto (x,y,z) puede variar al transcurrir el tiempo 't'. Pero para un evento (x,y,z,t) y su cubículo con aristas $\Delta x.\Delta y.\Delta z.\Delta t$, esta cantidad debe ser inmune a las variaciones métricas $\delta g^{\alpha\beta}$ que hagamos durante el proceso de optimización variacional. Porque ya decidimos cuáles partículas pertenecen a este bloque, y las numeramos i=1..N.

→Por otro lado, el factor verde $\Delta\tau_i$ es el mismo $\Delta\tau$ para todas las partículas. Lo anotamos:

$$\Delta\tau = \Delta\tau \sqrt{(1+2\Phi/c^2)\dot{t}^2 - g_{xx}.\dot{x}^2/c^2 - g_{yy}.\dot{y}^2/c \ldots - g_{ox}.\dot{x}\dot{t}/c - g_{xo}.\dot{x}\dot{t}/c \ldots etc}$$

No escribimos la expansión completa, nos contentamos con marcar 3 categorías de términos: temporal puro, espacial puro y mixto temporal/espacial. *Atención: ¡mantenemos separados el g_{ox} y el g_{xo}!*. Estamos acostumbrados a que tienen el mismo valor porque el tensor métrico es simétrico, pero aquí las variaciones serán de a un coeficiente por vez δg^{ox} y δg^{xo}.
Extraemos factor común $\dot{t}$ y hacemos aparecer las velocidades coordenadas $\dot{x}=u_x.\dot{t}$, $\dot{y}=u_y.\dot{t}$, etc.

$$\Delta\tau = \Delta\tau\, i\, .\sqrt{(1+2\Phi/c^2) - g_{xx}.u_x^2/c^2 - g_{yy}.u_y^2/c \ldots - g_{ox}.u_x/c \ldots etc}$$

$$\Delta\tau = \Delta t.\sqrt{1+2\Phi/c^2 - g_{xx}.u_x^2/c^2 - g_{yy}.u_y^2/c \ldots - g_{ox}.u_x/c \ldots etc}$$

Sustituimos en la acción $\Delta Acc = -\Sigma_i m_i.c^2.\Delta\tau_i$

$$\Delta Acc = -\Delta M.c^2.\ \Delta t.\sqrt{1+2\Phi/c^2 - g_{xx}.u_x^2/c^2 - g_{yy}.u_y^2/c \ldots - g_{ox}.u_x/c \ldots etc}$$

Aplicamos el desarrollo de Taylor a la raíz cuadrada, tomando la parte dominante.

$$\Delta Acc \approx -\Delta M.c^2.\Delta t.(\ 1+\Phi/c^2 - \tfrac{1}{2}g_{xx}.u_x^2/c^2 - \tfrac{1}{2}g_{yy}.u_y^2/c \ldots - \tfrac{1}{2}g_{ox}.u_x/c \ldots etc)$$

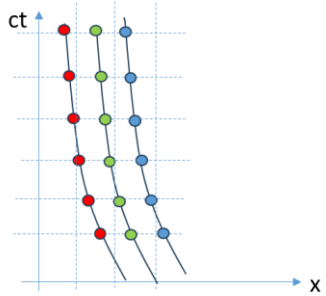
Limpiamos exceso de signos negativos:

$$\Delta Acc \approx -\Delta M.c^2.\Delta t.(1+\Phi/c^2) + \tfrac{1}{2}\,\Delta M.\Delta t\,(g_{xx}.u_x^2 + g_{yy}.u_y^2 \ldots + g_{ox}.u_x.c \ldots etc)$$

$$\Delta Acc \approx \tfrac{1}{2}\,\Delta M.\Delta t\,(g_{xx}.u_x^2 + g_{yy}.u_y^2 \ldots + g_{ox}.u_x.c \ldots etc) - \Delta M.c^2.\Delta t.(1+\Phi/c^2)$$

Estamos frente a la forma conocida: energía cinética menos potencial. Hay potenciales variables con la velocidad, no deberían asustarnos porque ya los vimos varias veces.

Las trayectorias de las partículas de polvo ya fueron variadas δX^α en un procedimiento aparte, cuando se buscaban los caminos óptimos de máximo 'τ' y se obtenían las ecuaciones geodésicas.
Ahora variamos la métrica dejando fijas las posiciones. ¿Qué significa eso? Es mantener las mismas trayectorias x(t), y(t), z(t), y por lo tanto las mismas velocidades coordenadas $u_x=dx/dt$, $u_y=dy/dt$, $u_z=dz/dt$.



Conservamos la misma colección de puntos (t,x,y,z) para cada partícula; en este ejemplo la verde, la roja y la azul mantienen su rastro o huella en un diagrama espaciotiempo.Tiene que ser así, para que las trayectorias continúen naturalmente entre un cubículo y su vecino. Sólo así podemos trabajar con cada cubículo por separado y variar la métrica $\delta g^{\alpha\beta}$ en cada caso.
Lo que sí cambia con $\delta g^{\alpha\beta}$ es el tiempo propio, y por lo tanto las cuadrivelocidades U^α .

Antes de comenzar los cálculos recordamos que en régimen de campos débiles, la métrica es de diagonal dominante y su inversa cumple propiedades que se pueden visualizar con un programa como el Scilab.

```
--> hab=rand(4,4,'normal')/1000; hab=(hab+hab')/2; //perturbac.
gab=diag([-1 1 1 1])+hab, inv_gab=inv(gab)
 gab  =
  -0.9988259   -0.0000514    0.0005123  -0.0006897
  -0.0000514    0.9981412    0.0001016   0.0001766
   0.0005123    0.0001016    1.0002972  -0.0002153
  -0.0006897    0.0001766   -0.0002153   0.9991572
 inv_gab  =
  -1.0011747   -0.0000515    0.0005126  -0.0006909
  -0.0000515    1.0018623   -0.0001018  -0.0001771
   0.0005126   -0.0001018    0.9997027   0.0002158
  -0.0006909   -0.0001771    0.0002158   1.0008431
```

Analizamos 3 categorías:

- Temporal-temporal: $g^{oo}=1/g_{oo}$. Si $g_{oo}= -1-\epsilon \rightarrow g^{oo}= -1+\epsilon$.
- Temporal-espacial: $g^{0j}=g_{jo}$
- Espacial-espacial: $g^{ii}=1/g_{ii}$

Temporal-temporal:

Variamos únicamente el potencial Φ presente en $-g_{oo}=1+2\Phi/c^2$.

$-g^{oo}= 1/(-g_{oo})$

$-g^{oo}=1/(1+2\Phi/c^2)$

$-g^{oo}\approx 1-2\Phi/c^2$

$g^{oo}\approx -1+2\Phi/c^2$

$\delta g^{oo}\approx 2\delta\Phi/c^2$

$\Delta Acc \approx \frac{1}{2}\,\Delta M.\Delta t\,(g_{xx}.u_x^2+g_{yy}.u_y^2 \ldots+g_{ox}.u_x.c \ldots etc) -\Delta M.c^2.\Delta t.(1+\Phi/c^2)$ →variamos

$\delta\Delta Acc \approx -\Delta M.c^2.\Delta t.(\delta\Phi/c^2)$ →sustituimos

$\delta\Delta Acc \approx -\Delta M.c^2.\Delta t.(\delta g^{oo}/2)$

$\delta\Delta Acc \approx -\frac{1}{2}\,\Delta M.c^2.\Delta t.(\delta g^{oo})$ →$\Delta M=\rho\Delta X\Delta Y\Delta Z$

$\delta\Delta Acc \approx -\frac{1}{2}\,\rho\Delta X\Delta Y\Delta Z.c^2.\Delta t.\delta g^{oo}$

$\delta\Delta Acc \approx -\frac{1}{2}\,\rho c^2.\delta g^{oo}.\Delta t.\Delta X\Delta Y\Delta Z$

$\delta\Delta Acc \approx -\frac{1}{2}\,\rho c^2.\delta g^{oo}.\Delta^4 X$

$\delta\Delta Acc \approx -\frac{1}{2}\,\rho c^2.\delta g^{oo}.\Delta^4 X$

$\delta\Delta Acc \approx -\frac{1}{2}\,T_{oo}.\delta g^{oo}.\Delta^4 X$

Llegamos al resultado deseado, aunque fuimos arrastrando varias imprecisiones derivadas de las aproximaciones W.F.L, por ejemplo:

- En la fórmula $\rho\Delta X\Delta Y\Delta Z$ ignoramos la contracción de Lorentz por velocidad, la distinción entre densidad propia y densidad móvil, y el efecto métrico de g_{xx},g_{yy},g_{zz} en el volumen…
- Se perdió el factor $\sqrt{-g}$ que debería acompañar a $\Delta^4 X$.
- La fórmula exacta no es $T_{oo}=\rho.c^2$ sino $T^o{}_o=-\rho.c^2$.

Valoramos el hecho de haber acertado el signo y el orden de magnitud.

$\delta\Delta Acc \approx -\frac{1}{2}\,T_{oo}.\delta g^{oo}.\Delta^4 X$

Espacial-espacial:

Variamos el coeficiente xx.

$g^{xx} \approx 1/(g_{xx})$ →derivada de un inverso

$\delta g^{xx} \approx -\delta g_{xx}/g_{xx}^2$ → g_{xx} casi unitario

$\delta g^{xx} \approx -\delta g_{xx}$

$\Delta Acc \approx \frac{1}{2}\,\Delta M.\Delta t\,(g_{xx}.u_x^2+g_{yy}.u_y^2 \ldots+g_{ox}.u_x.c \ldots etc) -\Delta M.c^2.\Delta t.(1+\Phi/c^2)$ →variamos

$\delta\Delta Acc \approx \frac{1}{2}\,\Delta M.\Delta t\,(\delta g_{xx}.u_x^2)$ →sustituimos

$\delta\Delta Acc \approx \frac{1}{2}\,\Delta M.\Delta t\,(-\delta g^{xx}\,u_x^2)$

$\delta\Delta Acc \approx -\frac{1}{2}\,\Delta M.\Delta t\,(\delta g^{xx}\,u_x^2)$

$\delta\Delta Acc \approx -\frac{1}{2}\,\Delta M.\Delta t\,.u_x^2.\,\delta g^{xx}$

$\delta\Delta Acc \approx -\frac{1}{2}\,\Delta Vol.\rho.\Delta t\,.u_x^2.\,\delta g^{xx}$

$\delta\Delta Acc \approx -\frac{1}{2}.\rho.u_x^2.\Delta t.\Delta Vol.\,\delta g^{xx}$

$\delta\Delta Acc \approx -\frac{1}{2}.T_{xx}.\Delta t.\Delta Vol.\,\delta g^{xx}$

$\delta\Delta Acc \approx -\frac{1}{2}.T_{xx}.\Delta t.\Delta Vol.\,\delta g^{xx}$

Otro resultado correcto (en signo y en orden de magnitud).

Temporal-espacial:

$g^{ox}\approx g_{ox}$

$\delta g^{ox} \approx \delta g_{ox}$

$\Delta Acc \approx \frac{1}{2}\,\Delta M.\Delta t\,(g_{xx}.u_x^2+g_{yy}.u_y^2 \ldots+g_{ox}.u_x.c \ldots etc) -\Delta M.c^2.\Delta t.(1+\Phi/c^2)$ →variamos

$\delta\Delta Acc \approx \frac{1}{2}\,\Delta M.\Delta t\,(\delta g_{ox}.u_x.c)$ →sustituimos

$\delta\Delta Acc \approx \frac{1}{2}\,\Delta M.\Delta t\,(\delta g^{ox}.u_x.c)$

$\delta\Delta Acc \approx \frac{1}{2}\,\Delta M.\Delta t\,(\delta g^{ox}.u_x.c)$

$\delta\Delta Acc \approx ½\ Vol.\rho.\Delta t\ (\delta g^{ox}.u_x.c)$

$\delta\Delta Acc \approx ½\ \rho.u_x.c.\ \Delta t\Delta x\Delta y\Delta z.\ \delta g^{ox}$

$\delta\Delta Acc \approx ½\ (-T_{ox}).\ \Delta t\Delta x\Delta y\Delta z.\ \delta g^{ox}$

$\delta\Delta Acc \approx ½\ (-T_{ox}).\ \Delta t\Delta x\Delta y\Delta z.\ \delta g^{ox}$

Atención: ¿Es correcto ese signo de menos?
Lo precisamos para llegar al resultado esperado, pero sería bueno razonarlo con métrica Minkowski (los factores gamma no importan, solo atendemos el signo y el orden de magnitud).

$U^o=c\ \dot{t}$ →bajamos índice

$U_o \approx -c\ \dot{t}$ →aprox. bajas velocidades $\dot{t}\approx 1$

$U_o \approx -c$

$U^x=\dot{x}$ →bajamos índice

$U_x \approx \dot{x}$ →aprox. bajas velocidades

$U_x \approx u_x$

$T_{ox}=\rho\ U_o\ U_x$ →sustituimos

$T_{ox}=-\rho\ c\ u_x$:Confirmamos que el signo es correcto

Juntamos entonces las 3 familias de variaciones:

Temporal-temporal: $\delta\Delta Acc \approx -\ ½\ T_{oo}.\delta g^{oo}.\Delta^4 X$

Temporal-espacial: $\delta\Delta Acc \approx ½\ (-T_{ox}).\ \Delta t\Delta x\Delta y\Delta z.\ \delta g^{ox}$

Espacial-espacial: $\delta\Delta Acc \approx -½.T_{xx}.\Delta t.\Delta Vol.\ \delta g^{xx}$

En todos los casos se cumple $\delta\Delta Acc \approx -½.T_{\alpha\beta}.\Delta^4 X\ \delta g^{\alpha\beta}$

Esto que fue demostrado con aproximaciones informales es un caso particular.
El resultado relativista con validez general, expresado con la raíz del determinante métrico, es:

$$\delta\Delta Acc \approx -½.T_{\alpha\beta}.\ \delta g^{\alpha\beta}\sqrt{-g}\ \ \Delta^4 X$$

Sumamos las variaciones de todos los hipercubitos, sustituyendo la sumatoria de elementos discretos por una integral de funciones continuas en 4D.

$$\delta Acc_m = -½ \iiiint T_{\alpha\beta}.\ \delta g^{\alpha\beta}\ \sqrt{-g}\ \ .d^4x$$

Combinamos con lo que nos daba en 11.4.5 la acción gravitatoria o de vacío.

$$\delta Acc_{grav} = K.\iiiint \delta g^{\alpha\beta}.[R_{\alpha\beta} - R/2.g_{\alpha\beta}].\sqrt{-g}.\ d^4x$$

$$\delta Acc_{total} = \delta Acc_{grav} + \delta Acc_m = \iiiint \delta g^{\alpha\beta}.[KR_{\alpha\beta} - KR/2.g_{\alpha\beta} - T_{\alpha\beta}/2].\sqrt{-g}.\ d^4x$$

Para lograr acción estacionaria $\delta Acc = 0\ \forall\delta g^{\alpha\beta}$, la condición a cumplir es:

$$KR_{\alpha\beta} - KR/2.g_{\alpha\beta} - T_{\alpha\beta}/2 = 0$$

$$R_{\alpha\beta} - R/2.g_{\alpha\beta} = 1/(2K).T_{\alpha\beta} = 0$$

Que es exactamente la ecuación de campo de Einstein, con una constante de acoplamiento $K=c^4/(16\pi G)$.

Materia presurizada:
Repasamos parte de los desarrollos de 11.3.4, enfocándonos en un caso particular con simetría esférica y métrica diagonal dada por funciones α(r) y β(r).
Volvemos al punto en que agrupábamos a un conjunto de partículas, con un aporte de acción proporcional a la densidad efectiva incrementada por presión:

$$\Delta Acc = -\ \rho_{eff}.dVol.c^2.\ \Delta\tau$$

$$\Delta Acc = -\ (\rho + p/c^2).\Delta Vol.c^2.\ \Delta\tau$$

$$\Delta Acc = -(\rho.c^2+p).\Delta Vol.\Delta\tau.\sqrt{\dot{t}^2.\alpha(r) - [\beta(r).\dot{r}^2 + r^2\ \dot{\theta}^2 + r^2\ \sin^2\theta\ \dot{\varphi}^2]/c^2}$$

Como primer ejercicio, variaremos esta acción respecto a la trayectoria (cuadrivector posición).
Esto nos dará la ecuación geodésica conocida, lo que ayudará a justificar el argumento de la densidad efectiva $(\rho+p/c^2)$. Será como si tuviéramos una acción $\Delta Acc = \int_\tau \mathcal{L}\ d\tau$ y trabajáramos con un "lagrangeano de bloque" en lugar de "lagrangeano de partícula".

$$\mathcal{L} = -(\rho.c^2+p).\Delta Vol.\sqrt{\dot{t}^2.\alpha(r) - [\beta(r).\dot{r}^2 + r^2\,\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2]/c^2}$$

A los efectos de este Lagrangeano, el volumen ΔVol es constante para todos los bloques.
Aplicamos la ecuación de Euler-Lagrange conocida $dP_r/d\tau - \partial\mathcal{L}/\partial r = F_r$
El momento más importante es el radial, que va a generar la condición de equilibrio de fuerzas.

$P_r = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{r} = -(\rho.c^2+p).\Delta Vol.\beta(r).\dot{r}$

Es nulo porque las porciones de materia están en reposo. → $dP_r/d\tau=0$.

La ecuación de Euler-Lagrange pasa a ser $dP_r/d\tau=\partial\mathcal{L}/\partial r=0$.
Ahora no hay fuerza F_r, al incorporar la presión dentro del lagrangeano su fuerza asociada (volumen por gradiente de presión) debería aparecer incorporada al término $\partial\mathcal{L}/\partial r$.
Operamos:

$\partial\mathcal{L}/\partial r = -p'(r).\Delta Vol.\sqrt{\ } - (\rho.c^2+p).\Delta Vol/(2\sqrt{\ }).\alpha'(r).\dot{t}^2$ → $\sqrt{\ }=1$

$\partial\mathcal{L}/\partial r = -p'(r).\Delta Vol - (\rho.c^2+p).\Delta Vol/2.\alpha'(r).\dot{t}^2$ → $\alpha.\dot{t}^2=1$ por reposo

$\partial\mathcal{L}/\partial r = -\Delta Vol.[\,p'(r) + (\rho.c^2+p).\alpha'(r)/2/\alpha(r)]$

La ecuación del movimiento (equilibrio de fuerzas) es $p'(r) + (\rho.c^2+p).\alpha'(r)/(2\alpha)=0$.
La misma obtenida en 10.4.3 por derivada covariante del tensor de energía-impulso.

Lo próximo sería variar la acción respecto a la métrica para obtener información sobre el tensor de energía-impulso. Repetimos la advertencia que hicimos con el caso del polvo: la complejidad matemática aumenta mucho si buscamos una solución exacta. Preferimos enfocarnos en un ejemplo que admita un tratamiento aproximado válido para bajas gravedades y bajas energías.

Asumimos un fluido con ecuación de estado de gas ideal $p.V=N.k_B.T$, como vimos en los capítulos 10.2.2 y 10.4.4. Reorganizamos a la materia en "cubitos cartesianos" Δx,Δy,Δz y numeramos con índice i=1,2…N a las moléculas presentes en un cierto cubito de análisis.
Mantenemos la hipótesis de que las moléculas siguen la estadística de Maxwell-Boltzmann, lo que implica que los cubitos no pueden ser estrictamente "infinitesimales", deben contener un número significativo de moléculas para aplicar a cada uno de ellos las leyes probabilísticas de los grandes números.

Cada partícula i-ésima, de masa molecular m_i, aporta a la acción:

$Acc_i = -m_i.c^2.\Delta\tau_i$

El tiempo propio lo estimamos en base a una métrica diagonal:

$$\Delta\tau_i = \Delta t.\sqrt{1+2\Phi/c^2 - g_{xx}.u_x^2/c^2 - g_{yy}.u_y^2/c^2 - g_{zz}.u_z^2/c^2}$$

Atención que $\Delta\tau_i$ tiene un valor diferente para cada molécula. Y la condición de reposo macroscópico solo se verá cuando hagamos sumas o promedios de un número grande de moléculas. A los efectos de una partícula individual, se está moviendo con velocidad térmica aleatoria u_x,u_y,u_z.
Δt lo extrajimos fuera de la raíz al sacar factor común $\dot{t}=dt/d\tau$ y sustituir $\dot{x}=\dot{t}.u_x$…etc.
Fue un paso necesario porque es una constante para todas las moléculas, es el intervalo de tiempo coordenado que define al hipercubo analizado. Pero ahora la raíz ya no tiene un valor unitario, y si variamos en forma exacta aparecerán factores $1/(2\sqrt{\ })$ que no serán deseables.
Sacrificamos un poco de precisión asumiendo bajas velocidades y bajas gravedades, para sustituir la raíz por su aproximación Taylor.

$$Acc_i = -m_i.c^2.\Delta t.\sqrt{1+2\Phi/c^2 - g_{xx}.u_x^2/c^2 - g_{yy}.u_y^2/c^2 - g_{zz}.u_z^2/c^2}$$

$$Acc_i \approx -m_i.c^2.\Delta t.\,(1+\Phi/c^2 - \tfrac{1}{2}\,g_{xx}.u_x^2/c^2 - \tfrac{1}{2}g_{yy}.u_y^2/c^2 - \tfrac{1}{2}g_{zz}.u_z^2/c^2)$$

$$Acc_i \approx \tfrac{1}{2}\,m_i\,g_{xx}.u_x^2 + \tfrac{1}{2}\,m_i\,g_{yy}.u_y^2 + \tfrac{1}{2}\,m_i\,g_{zz}.u_z^2 - m_i.c^2.\Delta t.\,(1+\Phi/c^2)$$

Tiene la forma "cinética menos potencial" conocida.
Estrictamente estaría faltando un término de "potencial de interacción" que modele las colisiones.

Cada partícula puede recibir el impacto de alguna compañera de cubículo, y su velocidad cambiará drásticamente luego del choque. Esto repercute en que el tamaño temporal de nuestro cubículo no deberá ser superior a t_c = tiempo medio entre colisiones.

Aplicamos variaciones de la métrica $\delta g^{00},\delta g^{xx},\delta g^{yy},\delta g^{zz}$ para ver cómo responde la acción.
Ahora las trayectorias y velocidades coordenadas las tomamos como fijas, son inmunes a la variación.

$$\delta Acc_i \approx \tfrac{1}{2}\, m_i\, \Delta t\, [\, (\delta g_{xx}.u_x^2) + (\delta g_{yy}.u_y^2) + (\delta g_{zz}.u_z^2)\,] - m_i.c^2.\Delta t.\ (\delta\Phi/c^2)$$

$$\delta Acc_i \approx \tfrac{1}{2}\, m_i\, \Delta t\, [\, (-\delta g^{xx}.u_x^2) + (-\delta g^{yy}.u_y^2) + (-\delta g^{zz}.u_z^2)\,] - m_i.c^2.\Delta t.\ (\tfrac{1}{2}\,\delta g^{oo})$$

Acabamos de aplicar los mismos recursos de aproximación que para el caso de polvo. Incluso con menos nivel de incertidumbre que en aquella ocasión, porque ahora la métrica no es "diagonal dominante" sino completamente diagonal.

Sumamos las variaciones de todas las moléculas del cubículo Σ_i, y hacemos aparecer las medias cuadráticas.

$$\delta\Delta Acc \approx \tfrac{1}{2}\, m_i\, \Delta t\, [\, (-\delta g^{xx}.\ \Sigma_i u_x^2) + (-\delta g^{yy}.\ \Sigma_i u_y^2) + (-\delta g^{zz}.\ \Sigma_i u_z^2)\,] - \Sigma_i m_i.c^2.\Delta t.\ (\tfrac{1}{2}\,\delta g^{oo})$$

$$\delta\Delta Acc \approx \tfrac{1}{2}\, m_i\, \Delta t\, [\, (-\delta g^{xx}.\ N\langle u_x^2\rangle) + (-\delta g^{yy}.\ N\langle u_y^2\rangle) + (-\delta g^{zz}.\ N\langle u_z^2\rangle)\,] - Nm_i.c^2.\Delta t.\ (\tfrac{1}{2}\,\delta g^{oo})$$

$$\delta\Delta Acc \approx \tfrac{1}{2}\, Nm_i\, \Delta t\, [\, (-\delta g^{xx}.\langle u_x^2\rangle) + (-\delta g^{yy}.\langle u_y^2\rangle) + (-\delta g^{zz}.\langle u_z^2\rangle)\,] - Nm_i.c^2.\Delta t.\ (\tfrac{1}{2}\,\delta g^{oo})$$

$Nm_i = \Delta M$, la masa total contenida inicialmente en el cubículo, en tiempo=t.
Escribimos $\Delta M=\rho.\Delta Vol$. En este régimen de aproximación no contemplamos como significativa la contracción de longitudes por velocidad ni la distorsión métrica espacial.
Las medias cuadráticas se corresponden con la velocidad térmica media mencionada en 10.2.2 y 10.3.4

$$\delta\Delta Acc \approx \tfrac{1}{2}\, \Delta M\, \Delta t\, [\, (-\delta g^{xx}.\langle u_x^2\rangle) + (-\delta g^{yy}.\langle u_y^2\rangle) + (-\delta g^{zz}.\langle u_z^2\rangle)\,] - \Delta M.c^2.\Delta t.\ (\tfrac{1}{2}\,\delta g^{oo})$$

$$\delta\Delta Acc \approx \tfrac{1}{2}\, \Delta M\, \Delta t\, [\, (-\delta g^{xx}.v_T^2) + (-\delta g^{yy}.v_T^2) + (-\delta g^{zz}.v_T^2)\,] - \Delta M.c^2.\Delta t.\ (\tfrac{1}{2}\,\delta g^{oo})$$

$$\delta\Delta Acc \approx \tfrac{1}{2}\, \rho\Delta Vol\, \Delta t\, [\, (-\delta g^{xx}.v_T^2) + (-\delta g^{yy}.v_T^2) + (-\delta g^{zz}.v_T^2)\,] - \rho\Delta Vol.c^2.\Delta t.\ (\tfrac{1}{2}\,\delta g^{oo})$$

$$\delta\Delta Acc \approx -\tfrac{1}{2}\, \Delta Vol.\Delta t\, [\, (\delta g^{xx}.\boldsymbol{\rho v_T^2}) + (\delta g^{yy}.\boldsymbol{\rho v_T^2}) + (\delta g^{zz}.\boldsymbol{\rho v_T^2}) + \rho.c^2.\delta g^{oo}\,]$$

Reconocemos la presión $\mathbf{p=\rho v_T^2}$.

$$\delta\Delta Acc \approx -\tfrac{1}{2}\, \Delta Vol.\Delta t\, [\, (\delta g^{xx}.\mathbf{p}) + (\delta g^{yy}.\mathbf{p}) + (\delta g^{zz}.\mathbf{p}) + \rho.c^2.\delta g^{oo}\,]$$

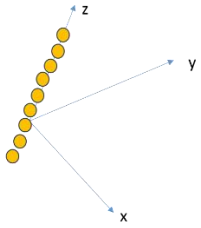
$$\delta\Delta Acc \approx -\tfrac{1}{2}\, \Delta^4 X\, [\, (\delta g^{xx}.\mathbf{p}) + (\delta g^{yy}.\mathbf{p}) + (\delta g^{zz}.\mathbf{p}) + \rho.c^2.\delta g^{oo}\,]$$

$$\delta\Delta Acc \approx -\tfrac{1}{2}.T_{\alpha\beta}.\Delta^4 X\ \delta g^{\alpha\beta} \qquad \text{(suma implícita en } \alpha\beta=00,11,22,33)$$

Una vez más nos encontramos con el resultado deseado.
Por supuesto, con las imprecisiones ya asumidas por el hecho de haber aplicado simplificaciones W.F.L.
Estuvimos desatendiendo todos los factores "gamma", tanto cineméticos como gravitacionales.
El objetivo modesto que nos propusimos fue acertar el orden de magnitud y el signo de la variación de la acción. Para justificar que el lagrangeano de las partículas, basado en el tiempo propio invariante, era un buen punto de partida para formar la "acción de la materia"; la que luego se acopla con la "acción de la métrica" para formar la acción total gravitatoria de Einstein-Hilbert.

11.4.7 Variación de los Christoffel:

Anexamos aquí unas reflexiones que buscan aclarar dudas que puedan haber quedado en 11.4.3 sobre el hecho de que las variaciones de Christoffel se comportan como buenos tensores.
Imaginamos una región del espacio donde se observan "jets relativistas", es decir, chorros de materia que son expulsados con gran energía.



Un equipo de científicos decide explorar esa región. Observan que la mayoría de los jets son expulsados por agujeros negros con enormes "discos de acreción", nadie considera prudente acercarse (figura izquierda).
Pero algunos jets parecen más inofensivos, como simples chorros de asteroides (figura derecha) →hacia allí se dirigen los científicos y se dividen en dos grupos de trabajo:

Grupo Σ: utiliza coordenadas cartesianas
Grupo Σ': utiliza coordenadas cilíndricas
Ambos hacen coincidir el eje $\vec{z}$ con la línea de objetos móviles.

Las primeras impresiones revelan una métrica aparentemente plana (no se siente ninguna fuerza gravitatoria significativa), así que los puntos de partida son:
$g_{ij}(ct,x,y,z) \approx diag(-1,1,1,1)$ $g'_{\alpha\beta}(ct,r,\varphi,z) \approx diag(-1,1,r^2,1)$.
El nexo entre ambos sistemas es $x=r.cos\varphi$, $y=r.sen\varphi$.
Los jacobianos son: directo=$JD^i_\alpha = \partial x^i/\partial X^\alpha$, inverso=$JI^\alpha_i = \partial X^\alpha/\partial x^i$.
Llamamos TS a la transformación tensorial que liga todos los cambios entre Σ y Σ'.
→Para un cuadrivector covariante $TS(A_i) = A_\alpha = A_i\, JD^i_\alpha$
→Para un cuadrivector contravariante $TS(A^i) = A^\alpha = JI^\alpha_i\, A^i$
→Para un tensor de rango 2 $TS(M^i_j) = M^\alpha_\beta = JI^\alpha_i\, M^i_j\, JD^j_\beta$

Los Christoffel no cumplen esta propiedad de "buena transformación tensorial".
$TS(\Gamma^k_{ij}) \neq \Gamma^\lambda_{\alpha\beta}$
Porque los Γ^k_{ij} de Σ todos nulos, mientras que para los $\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}$ de Σ' tenemos $\Gamma^r_{\varphi\varphi} = -r$, $\Gamma^\varphi_{r\varphi} = \Gamma^\varphi_{\varphi r} = 1/r$.

Los científicos comienzan a preparar instrumentos de alta precisión para poder medir los efectos métricos, porque saben que la métrica plana es solo una ilusión inicial.
Mientras preparan los detalles técnicos, van realizando cálculos matemáticos que consisten en "tanteos", "cambios tentativos" a la métrica, que en forma genérica llamamos δg^{ij} y $\delta g^{\alpha\beta}$.
Una de las primeras variaciones que ensayan es suponer que en el coeficiente métrico temporal hay un potencial gravitatorio Φ_g logarítmico, resultante de integrar la ecuación de Poisson $\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho$ para una aproximación de línea de masa infinitamente larga.
Las métricas perturbadas pasan a ser:
$g_{ij} + \delta g_{ij} \approx diag(-1+e.log[L^2/(x^2+y^2)],1,1,1)$ $g_{\alpha\beta} + \delta g_{\alpha\beta} \approx diag(-1+2e.log(L/r),1,r^2,1)$.
$e \ll 1$, $L \gg r$ para los puntos de observación, $e.log(L/r) \ll 1$.

Calculamos los Christoffel modificados, y verificamos el resultado con esta página:
https://christoffel-symbols-calculator.com

Para coordenadas cartesianas:

$$\Gamma^0_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{ex}{(x^2+y^2)\left(e\log\left(\frac{L^2}{x^2+y^2}\right)-1\right)} & -\frac{ey}{(x^2+y^2)\left(e\log\left(\frac{L^2}{x^2+y^2}\right)-1\right)} & 0 \\ -\frac{ex}{(x^2+y^2)\left(e\log\left(\frac{L^2}{x^2+y^2}\right)-1\right)} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{ey}{(x^2+y^2)\left(e\log\left(\frac{L^2}{x^2+y^2}\right)-1\right)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma^1_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \frac{ex}{x^2+y^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma^2_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \frac{ey}{x^2+y^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma^3_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para coordenadas cilíndricas:

$$\Gamma^0_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{e}{r\left(2e\log\left(\frac{L}{r}\right)-1\right)} & 0 & 0 \\ -\frac{e}{r\left(2e\log\left(\frac{L}{r}\right)-1\right)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma^1_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \frac{e}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma^2_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma^3_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Las variaciones de los Christoffel son fáciles de ver, solo hay que fijarse en los casilleros que contienen una magnitud ‘e’ (proporcional a la densidad de masa por unidad de longitud del “chorro” de materia).
La condición $e \ll 1$ asegura que estas variaciones se pueden modelar como “diferenciales” δg_{ij} y $\delta g_{\alpha\beta}$.

Para el sistema Σ tenemos:
$\delta\Gamma^0_{01}=\delta\Gamma^0_{10}=e.x/r^2/(1-2e.\log(L/r))$
$\delta\Gamma^0_{02}=\delta\Gamma^0_{20}=e.y/r^2/(1-2e.\log(L/r))$
$\delta\Gamma^1_{00}=e.x/r^2$
$\delta\Gamma^2_{00}=e.y/r^2$

Para el sistema Σ’ tenemos:
$\delta\Gamma^t_{tr}=\delta\Gamma^t_{rt}= e/r/[1-2e.\log(L/r)]$
$\delta\Gamma^r_{tt}=e/r$

Trataremos de calcular cuál sería la transformación tensorial esperada para obtener las variaciones en Σ’.
Esperaríamos $\delta\Gamma^r_{tt}=TS(\delta\Gamma^k_{ij})=J\Gamma^r_k.\ \delta\Gamma^k_{ij}.JD^i_t.JD^j_t$
Es una suma inmensa de 4x4x4=64 términos :(, pero no debemos desanimarnos porque la mayoría de los términos son nulos. Por ejemplo, $JD^i_t=\partial x^i/\partial t$. La única variable cartesiana que depende del tiempo ‘t’ es el propio tiempo ‘t’ de índice i=0. Lo mismo JD^j_t solo aporta algo no trivial (unitario) en j=0.

$\delta\Gamma^r_{tt}=J\Gamma^r_k.\ \delta\Gamma^k_{00}$

Ahora buscamos las variaciones no nulas de la forma Γ^k_{00}, solo hay 2: k=1 k=2.
Buscamos en las matrices de Christoffel $\delta\Gamma^1_{00}=e.x/r^2$ $\delta\Gamma^2_{00}=e.y/r^2$.

Calculamos $JI^r_1=\partial r/\partial x=x/r$, $JI^r_2=\partial r/\partial y=y/r$. Y sustituimos.

$\delta\Gamma^r_{tt}= JI^r_1.\ \delta\Gamma^1_{00} + JI^r_2.\ \delta\Gamma^2_{00}$

$\delta\Gamma^r_{tt}= x/r.\ e.x/r^2 + y/r.\ e.y/r^2$

$\delta\Gamma^r_{tt}= ex^2/r^3 + ey^2/r^3 = e(x^2+y^2)/r^3=e/r$

Dio exactamente lo que tenía que dar.

Para el otro casillero donde hay variación, esperamos una transformación tensorial

$\delta\Gamma^t_{tr}=TS(\delta\Gamma^k_{ij})=JI^t_k.\ \delta\Gamma^k_{ij}.JD^i_t.JD^j_r$

El índice 'i' aparece en $JD^i_t=\partial x^i/\partial t$, solo aporta un factor unitario para i=0.

$\delta\Gamma^t_{tr}=JI^t_k.\ \delta\Gamma^k_{0j}.JD^j_r$

El índice 'j' aparece en $JD^j_r=\partial x^j/\partial r$, tenemos j=1 y j=2.

Para j=1 $\partial x/\partial r=\cos\varphi=x/r$. Para j=2 $\partial y/\partial r=\text{sen}\varphi=y/r$

$\delta\Gamma^t_{tr}=JI^t_k.\ \delta\Gamma^k_{01}.JD^1_r +JI^t_k.\ \delta\Gamma^k_{02}.JD^2_r$

$\delta\Gamma^t_{tr}=JI^t_k.\ \delta\Gamma^k_{01}.x/r +JI^t_k.\ \delta\Gamma^k_{02}.y/r$

Finalmente, las variaciones de Christoffel de la forma $\delta\Gamma^k_{01}$ y $\delta\Gamma^k_{02}$ solo aparecen con k=0, y para esos casos el jacobiano inverso es unitario $JI^t_k=1$.

$\delta\Gamma^t_{tr}=JI^t_k.\ \delta\Gamma^k_{01}.x/r +JI^t_k.\ \delta\Gamma^k_{02}.y/r$

$\delta\Gamma^t_{tr}=1.\ \{e.x/r^2/[1-2e.\log(L/r)]\}.x/r +1.\ \{e.y/r^2/[1-2e.\log(L/r)]\}.y/r$

$\delta\Gamma^t_{tr}=\{e.x^2/r^3/[1-2e.\log(L/r)]\} +\{e.y^2/r^3/[1-2e.\log(L/r)]\}$

$\delta\Gamma^t_{tr}=\{e.(x^2+y^2)/r^3\}/[1-2e.\log(L/r)]$

$\delta\Gamma^t_{tr}=e./r/[1-2e.\log(L/r)]$

Que es exactamente lo que muestran las tablas de coeficientes.

Mientras se ejecutan estos cálculos, se terminan de poner a punto los detalles técnicos para realizar los experimentos de mediciones métricas con instrumental de alta precisión.

Y continúan las pruebas con nuevas "iteraciones" $\delta g^{\alpha\beta}$, variando levemente la métrica (ahora también en la parte espacial) hasta encontrar una que sea compatible con las mediciones experimentales y con las hipótesis teóricas (ej: tensor de Ricci compatible con el vacío, o con la distribución de materia observada).

Los científicos se dan cuenta de que no es necesario repetir en cada caso los cálculos artesanales de las variaciones de Christoffel, porque encuentran un argumento válido para cualquier caso general.

La transformación de un cuadrivector es:

$TS(A^i)= A^\alpha = JI^\alpha_i\ A^i$

Con cada variación tentativa de la métrica, el cuadrivector A^i puede cambiar sus componentes δA^i (serán variaciones ínfimas porque sabemos que la métrica está muy cercana a la de Minkowski.

En el otro referencial, las componentes quedarán perturbadas $A^\alpha +\delta A^\alpha$.

Y las respectivas variaciones seguirán la regla de conversión de componentes tensoriales.

Esto se puede entender sabiendo que TS es una transformación lineal.

$TS(A^i +\delta A^i)= TS(A^i)+ TS(\delta A^i)=A^\alpha+ TS(\delta A^i)$

→debe cumplirse $TS(\delta A^i)= \delta A^\alpha$

La transformación de cualquier tensor de segundo rango es:

$TS(G_i^j)= G_\alpha^\beta = JD^i_\alpha\ G_i^j\ JI^\beta_j$ (*el producto matricial requiere alguna trasposición*)

Con igual argumento deducimos que las variaciones siguen la regla de transformación.

$TS(\delta G_i^j)= \delta G_\alpha^\beta$

Un caso particular de tensor de segundo rango es el gradiente de un vector, es decir, su derivada covariante.

$G_i^j= \nabla_i A^j=\partial_i A^j+\Gamma^j_{in}A^n$

Tomamos variación, utilizando las reglas de Leibniz del diferencial de un producto. Repetimos: como son variaciones muy reducidas, se pueden manejar como "diferenciales".

$\delta G_i^j = \partial_i \delta A^j + \Gamma^j_{in} \delta A^n + \delta\Gamma^j_{in} A^n$ →agrupamos

$\delta G_i^j = \nabla_i \delta A^j + \delta\Gamma^j_{in} A^n$

Los términos coloreados en verde son la derivada covariante del vector δA^j, utilizando la antigua conexión de Christoffel en Σ. Luego de la variación la conexión cambia, pero siempre manteniendo la propiedad de que la derivada covariante se transforma como un buen tensor.

En el otro referencial Σ', el de las coordenadas cilíndricas, razonamos de forma similar.

$G_\alpha^\beta = \nabla_\alpha A^\beta = \partial_\alpha A^\beta + \Gamma^\beta_{\alpha\lambda} A^\lambda$

$\delta G_\alpha^\beta = \partial_\alpha \delta A^\beta + \Gamma^\beta_{\alpha\lambda} \delta A^\lambda + \delta\Gamma^\beta_{\alpha\lambda} A^\lambda$ →agrupamos

$\delta G_\alpha^\beta = \nabla_\alpha \delta A^\beta + \delta\Gamma^\beta_{\alpha\lambda} A^\lambda$

El término verde $\nabla_\alpha \delta A^\beta$ es la derivada covariante de la variación δA^β utilizando la antigua conexión en Σ', antes de variar.

Analizamos finalmente la transformación lineal TS entre Σ y Σ'.

Sabemos que debe cumplirse $TS(\delta G_i^j) = \delta G_\alpha^\beta$.

También sabemos que los primeros sumandos verdes son correspondientes $TS(\nabla_i \delta A^j) = \nabla_\alpha \delta A^\beta$.

Esto significa que los segundos sumandos, de color magenta, también deben ser correspondientes en la transformación $TS(\delta\Gamma^j_{in} A^n) = \delta\Gamma^\beta_{\alpha\lambda} A^\lambda$.

La correspondencia debe conservarse para cualquier cuadrivector arbitrario.

Esto solo puede cumplirse si las variaciones de Christoffel se transforman con las reglas tensoriales.

$\delta\Gamma^\beta_{\alpha\lambda} = JI^\beta_j \, \delta\Gamma^j_{in} \, JD^i_\alpha \, JD^n_\lambda$

11.5 Primeras soluciones exactas.

Deberíamos comenzar explorando la región vacía en los alrededores de una distribución de materia con simetría esférica, con el objetivo de comprobar si las soluciones de Ricci nulo coinciden con alguna de las que estuvimos "adivinando" desde el capítulo 7 en adelante.
Eso sería lo más lógico desde el punto de vista de la complejidad física: primero vacío, luego materia.
Y haría honor al orden histórico, ya que fue Karl Schwarzschild quien publicó en 1916 la primera solución exacta de las ecuaciones de Einstein, válida para el escenario de simetría esférica.

Sin embargo, la complejidad matemática de los cálculos basados en el tensor de Riemann y Ricci nos motiva a cambiar ligeramente el enfoque. La solución de vacío la obtendremos por deriva geodésica en las coordenadas de Gullstrand-Painlevé, resolviendo una única incógnita v(r). Lo que en el mejor de los casos nos asegurará un componente nulo del Ricci (R_{00}) pero no necesariamente el tensor de Ricci completo.
Continuaremos luego con ciertas configuraciones de materia analizándolas "desde adentro". Una de ellas nos mostrará cómo la solución interior se "enlaza" naturalmente con la solución de Schwarzschild y Gullstrand-Painlevé en la frontera que limita el vacío con la materia. Otra configuración nos permitirá comprobar la validez de las ecuaciones de campo en un escenario simplificado en que los tensores de Riemann y Ricci se pueden calcular sin demasiadas operaciones.
Posponemos para el inicio del capítulo 12 la solución completa de Schwarzschild, que requiere un tratamiento matemático más complejo. Ahí sí demostraremos finalmente que las funciones propuestas como solución anulan completamente el Ricci R_{00}, R_{rr}, $R_{\theta\theta}$ y $R_{\varphi\varphi}$.

11.5.1 Solución de vacío:

El escenario para analizar la deriva geodésica consiste en un conjunto 8 partículas en caída libre radial, ubicadas en los vértices de un paralelepípedo y con aristas alineadas según las 3 direcciones coordenadas Δr, $\Delta\theta$ y $\Delta\varphi$. La ecuación en que nos basamos es 9.2.4:

$$1/\Delta S_r \,.d^2\Delta S_r/d\tau^2 + 1/\Delta S_\theta \,.d^2\Delta S_\theta/d\tau^2 + 1/\Delta S_\varphi \,.d^2\Delta S_\varphi/d\tau^2 = -4.\pi.G.\rho$$

$\rho=0$ porque estamos en vacío

Elegimos las coordenadas de Gullstrand-Painlevé para describir esta caída libre, ya que el tiempo coordenado 'T' coincide con el tiempo propio 'τ' para las partículas viajeras (asumiendo que todas iniciaron la caída libre en el infinito en reposo, para que se cumpla esta condición).

$$dS^2 = -(c.dT)^2 + [dr + v(r,T).dT]^2 + r^2.(d\theta^2 + sen^2\theta\, d\varphi^2)$$

Las distancias métricas son las euclídeas que surgen de tomar un corte T=cte, dT=0.

$$\Delta S_r = \Delta r = r_A - r_B$$
$$\Delta S_\theta = r.\Delta\theta$$
$$\Delta S_\varphi = r.sen\theta.\Delta\varphi$$

La ecuación de caída libre es:

$$r^{\cdot} = -v(r)\, T^{\cdot} \quad , \text{con} \quad T^{\cdot}=1$$
$$r^{\cdot\cdot} = -v'(r).r^{\cdot}$$
$$r^{\cdot\cdot} = v'(r).v(r) = \text{lo llamamos } g(r)$$

La deriva en la arista radial es:

$d^2\Delta S_r/d\tau^2 = r^{\cdot\cdot}(A) - r^{\cdot\cdot}(B)$ →tomamos límite para A,B muy próximos
$d^2\Delta S_r/d\tau^2 = \Delta r \,.\, \partial_r\, g(r)$
$d^2\Delta S_r/d\tau^2 = \Delta r \,.\, g'(r)$ →dividimos por $\Delta S_r = \Delta r$
$1/\Delta S_r \,.\, d^2\Delta S_r/d\tau^2 = g'(r)$

La deriva en la arista polar es:

$\Delta S_\theta = r.\Delta\theta$
$d^2\Delta S_\theta/d\tau^2 = r^{\cdot\cdot}.\Delta\theta = g(r).\Delta\theta$ →dividimos por $\Delta S_\theta = r.\Delta\theta$
$1/\Delta S_\theta.d^2\Delta S_\theta/d\tau^2 = g(r)/r$

La deriva en la arista acimutal es:

$\Delta S_\varphi = r.\text{sen}\theta.\Delta\varphi$

$d^2\Delta S_\varphi/d\tau^2 = r\ddot{}.\ \text{sen}\theta.\Delta\varphi = g(r).\ \text{sen}\theta.\Delta\varphi$ →dividimos por $\Delta S_\theta = r.\Delta\theta$

$1/\Delta S_\varphi.d^2\Delta S_\varphi/d\tau^2 = g(r)/r$

Combinamos las 3 direcciones coordenadas:

$1/\Delta S_r\ .d^2\Delta S_r/d\tau^2 + 1/\Delta S_\theta\ .d^2\Delta S_\theta/d\tau^2 + 1/\Delta S_\varphi\ .d^2\Delta S_\varphi/d\tau^2 = 0$

$g'(r) + g(r)/r + g(r)/r = 0$

$g'(r) + 2g(r)/r = 0$

Esta es la ecuación diferencial a resolver. Probamos potencias $g(r)=K.r^n$, $g'(r)=K.n.r^{n-1}$

$K.n.r^{n-1} = -2K.r^n/r$ →sustituimos las funciones potenciales

$K.n.r^{n-1} = -2K.r^{n-1}$ →cancelamos factores comunes

$n = -2$ queda resuelto el exponente incógnito

Entonces la forma genérica es: **$g(r) = K/r^2$**

Luego calculamos $g(r)=v'(r).v(r)$

$K/r^2=v'(r).v(r)$

$K/r^2=v.dv/dr$

$K.dr/r^2=v.dv$ →diferenciales exactos

$-K/r = v^2/2$

$v^2= -2K/r$

En el límite $r\to\infty$ esperamos reencontrar los valores clásicos de la mecánica de Newton y Keppler, eso da la pista de que la constante de integración es $K= -M.G$

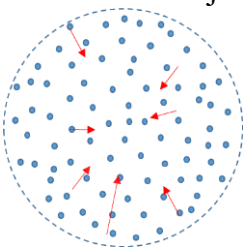
$g(r) = -MG/r^2$ aceleración gravitatoria

$v^2= 2MG/r$ velocidad de escape

Puede parecer que el resultado es trivial porque coincide con el newtoniano para todo 'r'. Pero en realidad es un resultado muy profundo porque g(r) se refiere a derivada respecto al tiempo propio; adquiere este aspecto "simple" gracias a la elección de la coordenada 'T' de las caídas libres y a la coordenada 'r'.

11.5.2 Astro en formación:

Pasamos a trabajar con la siguiente configuración *idealizada* de materia:



- coordenadas (T, r, θ, φ), tiempo T=inspirado en Gullstrand-Painlevé (capítulo 7.2.4)
- Partículas de polvo cósmico que no interactúan entre ellas, salvo por gravedad.
- Las partículas forman una nube o "bola" que mantiene siempre una simetría esférica perfecta.
- $R_a(T)$ es el radio instantáneo que marca el límite de la nube. Disminuye con el tiempo porque la gravedad hace que el polvo tienda a concentrarse cada vez más cerca del origen de coordenadas.
- Densidad de masa ρ(T) variable en el tiempo, homogénea en el espacio para $r<R_a(T)$.
- La velocidad de las partículas es radial entrante –v(r,T), sin desvíos angulares.
- Ignoramos cualquier acción gravitatoria del resto del Universo.

Planteamos una métrica con la forma de Gullstrand-Painlevé pero con una función de velocidad variable con la posición y el tiempo. Inicialmente una función incógnita, nuestra tarea será resolverla.

$dS^2 = -(c.dT)^2 + [dr + v(r,T).dT]^2 + r^2.(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta\ d\varphi^2)$

$\mathcal{L}(\tau) = -m_o.c^2.\ \sqrt{T\dot{}^2 - [r\dot{} + v(r,T).T\dot{}]^2/c^2 - r^2.[\theta\dot{}^2 + \text{sen}^2\theta\ \varphi\dot{}^2]/c^2}$

La primera condición que imponemos es que cada partícula de polvo siga una trayectoria geodésica, una línea de caída libre en la geometría moldeada por las demás masas. Para la caída libre radial imponemos la condición de Gullstrand-Painlevé $r^{\cdot} = -v(r,T).T^{\cdot}$, y sustituimos en el Lagrangeano junto con $\theta^{\cdot}=0$, $\varphi^{\cdot}=0$.
Nos queda $\mathcal{L}(\tau)= -m_o.c^2.T^{\cdot} \rightarrow T^{\cdot}=1$, $dT=d\tau$.

Conservación de la energía:
El determinante métrico es el mismo de las coordenadas esféricas, no depende de la incógnita v(r,T):
$\sqrt{-g} = r^2.\text{sen}\theta$
Esto nos permite calcular la divergencia de los flujos másicos radiales como si fueran coordenadas esféricas:
$1/r^2.\partial_r(r^2.jm)$, siendo $jm= -\rho.v$
La conservación de la masa impone que esa divergencia debe cancelarse con $\rho'(T)=\partial\rho(T)/\partial T$

$\rho'(T) + 1/r^2.\partial_r(r^2.jm) = 0$
$\rho'(T) = 1/r^2.\partial_r [r^2.\rho(T).v(r,T)]$
$\rho'(T) = \rho(T)/r^2.\partial_r [r^2.v(r,T)]$
$r^2.\rho'(T) = \rho(T).\partial_r [r^2.v(r,T)]$ →integramos en 'r', queda una indeterminada C(T)
$r^3/3.\rho'(T) + C(T) = \rho(T).r^2.v(r,T)$ →dividimos por r^2
$r/3.\rho'(T) + C(T)/r^2 = \rho(T).v(r,T)$

La constante de integración multiplica a una potencia negativa del radio 'r', diverge en el origen r=0. Solo podríamos aceptarla si el origen no perteneciera a la región que queremos analizar, pero no es el caso. Debemos entonces descartar C(T), la consideramos nula C(T)=0.

$r/3.\rho'(T) = \rho(T).v(r,T)$

Esto nos está diciendo que la velocidad incógnita varía espacialmente como un polinomio de la variable radial 'r', con algún coeficiente que eventualmente puede depender del tiempo: $v(r,T)=c.r/R.f(T)$

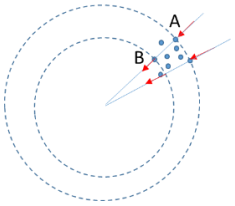
$r/3.\rho'(T) = \rho(T).c.r/R.f(T)$
$1/3.\rho'(T) = \rho(T).c/R.f(T)$
$\rho'(T) = 3c/R.\rho(T).f(T)$

Nos queda una ecuación diferencial en el tiempo. Todavía no la podemos resolver porque son 2 incógnitas.

Deriva geodésica:
La segunda ecuación la vamos a obtener de la desviación geodésica. La condición $T^{\cdot}=1$ nos va a simplificar los cálculos cuando hagamos derivadas temporales, ya que $d/d\tau$ coincide con d/dT.

$r^{\cdot} = -v(r,T)$
$r^{\cdot} = -c.r/R.f(T)$ →derivamos $d/d\tau$
$r^{\cdot\cdot} = -c.r^{\cdot}/R.f(T) - c.r/R.f'(T)$
$r^{\cdot\cdot} = -c/R.[r^{\cdot}.f(T) + r.f'(T)]$ →sustituimos $r^{\cdot}$
$r^{\cdot\cdot} = -c/R.[-c.r/R.f(T).f(T) + r.f'(T)]$
$r^{\cdot\cdot} = -r.c/R.[-c/R.f^2(T)+f'(T)]$

A los efectos de la desviación geodésica, lo que analizamos es un pequeño cubículo de polvo con extensión en las 3 direcciones coordenadas Δr, $\Delta\theta$ y $\Delta\varphi$. Nos importa la deriva en las longitudes de las aristas del cubículo, las que contribuirían a una variación del volumen.



Utilizamos la ecuación 9.2.4: $1/\Delta S_r .d^2\Delta S_r/d\tau^2 + 1/\Delta S_\theta .d^2\Delta S_\theta/d\tau^2 + 1/\Delta S_\varphi .d^2\Delta S_\varphi/d\tau^2= -4.\pi.G.\rho(T)$
Las distancias métricas son: $\Delta S_r=\Delta r$, $\Delta S_\theta=r.\Delta\theta$, $\Delta S_\varphi=r.\text{sen}\theta\Delta\varphi$.
→Atención que esto último no es una aproximación de campos débiles, es una igualdad exacta.

La métrica con la que estamos trabajando tiene la forma de Gullstrand-Painlevé y es exactamente euclídea en sus cortes espaciales de igual T (T=cte, dT=0).
La fórmula de desviación geodésica podría considerarse en otras circunstancias como una aproximación para gravedades débiles donde valdría dT≈dτ. Pero aquí es exactamente dT=dτ, porque la materia que estamos analizando es el propio polvo que genera la gravedad, y su caída libre radial mantiene $T\dot{}=1$.

Llamamos 'A' al vértice "alto" (el que tiene más alto su potencial gravitatorio); 'B' = vértice "bajo"

$\Delta S_r = r_A - r_B$

$d^2\Delta S_r/d\tau^2 = r_A\ddot{} - r_B\ddot{}$ →sustituimos por lo que acabamos de calcular

$d^2\Delta S_r/d\tau^2 = (r_A - r_B).(-c)/R.[-c/R.f^2(T)+f'(T)]$

$1/\Delta S_r.d^2\Delta S_r/d\tau^2 = -c/R.[-c/R.f^2(T)+f'(T)] = r\ddot{}/r$

$\Delta S_\theta = r.\Delta\theta$	$\Delta S_\varphi = r.\mathrm{sen}\theta.\Delta\varphi$
$d^2\Delta S_\theta/d\tau^2 = r\ddot{}.\Delta\theta$	$d^2\Delta S_\varphi/d\tau^2 = r\ddot{}.\mathrm{sen}\theta.\Delta\varphi$
$1/\Delta S_\theta.d^2\Delta S_\theta/d\tau^2 = r\ddot{}/r$	$1/\Delta S_\varphi.d^2\Delta S_\varphi/d\tau^2 = r\ddot{}/r$

→Las 3 contribuciones dan lo mismo. Sustituimos:

$3\,r\ddot{}/r = -4.\pi.G.\rho(T)$

$-3c/R.[-c/R.f^2(T)+f'(T)] = -4.\pi.G.\rho(T)$

$[-c/R.f^2(T)+f'(T)] = 4.\pi.G.R/(3c).\rho(T)$

Planteamos una al lado de la otra las 2 ecuaciones diferenciales en el tiempo 'T'.

$[-c/R.f^2(T)+f'(T)] = 4/3.\pi.G.R/c.\rho(T)$

$\rho'(T) = 3c/R.\rho(T).f(T)$

Probamos si existen constantes 'n' ρ_o con la condición $\rho(T)= \rho_o.f^n(T)$, lo que ayudaría a reducir el acoplamiento entre las dos funciones ρ,f.
Derivamos $\rho'(T)=n.\rho_o.f^{n-1}(T)f'(T)$, igualamos con la conservación de la masa $\rho'(T) = 3c/R.\rho(T).f(T)$.

$n.\rho_o.f^{n-1}(T)\,f'(T) = 3c/R.\rho(T).f(T)$ →sustituimos

$n.\rho_o.f^{n-1}(T)\,f'(T)= 3c/R.\ \rho_o.f^n(T).f(T)$

$f^{n-1}(T)\,f'(T)= 3c/(nR).f^{n+1}(T)$

$f'(T)= 3c/(nR).f^2(T)$

Sustituimos en la deriva geodésica.

$-c/R.f^2(T)+f'(T) = 4/3.\pi.G.R/c.\rho(T)$

$-c/R.f^2(T)+ 3c/(nR).f^2(T)= 4/3.\pi.G.R/c.\rho(T)$

$c/R.f^2(T)[-1+3/n]= 4/3.\pi.G.R/c.\rho(T)$

$f^2(T)[-1+3/n]= 4/3.\pi.G.R^2/c^2.\rho(T)$ →sustituimos la conjetura de desacople

$f^2(T)[-1+3/n]= 4/3.\pi.G.R^2/c^2.\rho_o.f^n(T)$

Vemos que existe una solución con exponente $n=2$. Solo falta relacionar las otras constantes.

$-1+3/2= 4/3.\pi.G.R^2/c^2.\rho_o$

$1/2= 4/3.\pi.G.R^2/c^2.\rho_o$

$8/3.\pi.G.\rho_0.R^2/c^2=1$

ρ_0 sería la densidad en T=0, y la evolución temporal tendría condición inicial f(T)=1 en T=0.

$\rho(T) = \rho_0.f^2(T)$

Tenemos finalmente desacoplada la ecuación diferencial para f(T).

$f'(T) = 3c/(2R).f^2(T)$

La ecuación diferencial no es lineal pero se puede integrar por variables separables.

$df/dT = 3c/(2R).f^2$

$df/ f^2 = 3c/(2R).dT$ →diferenciales exactos

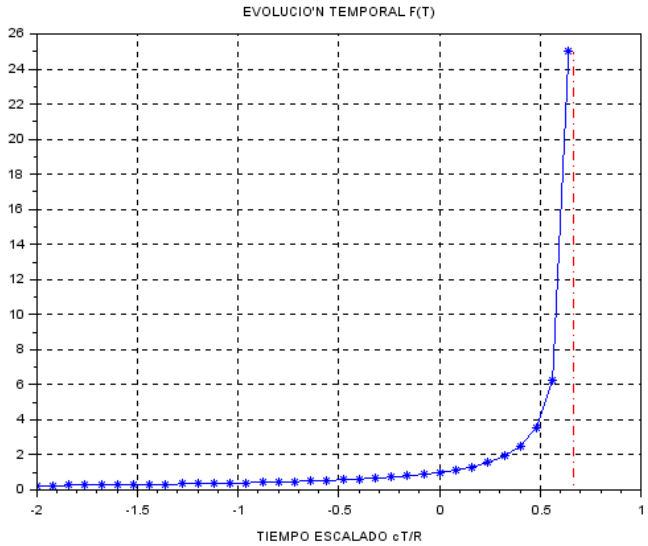
$1/f0 - 1/f = 3cT/(2R)$ f0=f(0)=1, elegimos esta condición inicial para T=0

$1 - 1/f = 3cT/(2R)$

$1 - 3cT/(2R) = 1/f$

$$f(T) = 1/[1-3cT/(2R)]$$

Esta función f(T) diverge en T=2R/(3c). Predice que en ese hipotético tiempo futuro las partículas adquirirían todas velocidad infinita v(r,T)=c.r/R.f(T) y la densidad sería infinita $\rho(T)=\rho_0.f^2(T)$.



No debemos preocuparnos por el infinito, ya que afirmamos al comienzo de esta sección que era una distribución idealizada de materia. Antes de llegar a esos niveles de alta concentración y energía, las partículas estarán suficientemente próximas unas de otras como para que deje de valer la hipótesis de polvo cósmico. Aparecerán presiones, flujos térmicos y diferentes fenómenos que requieren otras áreas de la Física para ser explicados. Para este capítulo nos quedamos solo con la idea primitiva de un posible proceso de formación de un astro, en sus etapas iniciales.

Veremos que la velocidad de escape v(r,T) puede interpretarse según un radio de Schwarzschild "*personalizado*" para cada partícula de polvo, de acuerdo con la masa instantánea M(r,T) encerrada por una cáscara de radio 'r' en tiempo 'T'.

$v^2(r,T) = c^2.\ r_S(r,T)/r$

$v^2(r,T) = c^2.\ 2.M(r,T).G/c^2/r$

$v^2(r,T) = 2.M(r,T).G/r$

$v^2(r,T) = 2.4/3.\pi.r^3.\rho(T).G/r$

$v^2(r,T) = r^2.8/3.\pi.\rho(T).G$ →sustituimos $\rho(T)=\rho_0.f^2(T)$

$v^2(r,T) = r^2.8/3.\pi.\rho_0.f^2(T).G$

$v^2(r,T) = r^2.8/3.\pi.G.\rho_0.f^2(T)$ →aplicamos la relación entre constantes

$v^2(r,T) = r^2.c^2/R^2.f^2(T)$

$v^2(r,T) = r^2.c^2/R^2.f^2(T)$

$v(r,T) = c.r/R.f(T)$ →exactamente la forma funcional que habíamos planteado

Podríamos haber hecho este razonamiento para concluir $\rho(T)=\rho_0.f^2(T)$, en lugar de "inventar" un exponente incógnito 'n' $\rho(T)=\rho_0.f^n(T)$ y confiar en que haya solución.

<u>Aceleración gravitatoria</u>:

Retomamos la ecuación de fuerzas y aceleraciones.

$r^{\cdot} = -v$

$r^{\cdot\cdot} = -\partial v/\partial r.r^{\cdot} - \partial v/\partial T.T^{\cdot}$

En escenarios clásicos, el primer término es proporcional al gradiente de potencial ($\nabla\Phi_g$) y suele ser el dominante. Mientras que el segundo término es usualmente mucho menos significativo porque corresponde a un efecto "gravitomagnético" proporcional a $\partial A_g^{\rightarrow}/\partial T$.
Sin embargo, aquí vemos que ambos son del mismo orden de magnitud y el que domina es el $\partial A_g^{\rightarrow}/\partial T$.

$\ddot{r} = -r.c/R.[-c/R.f^2(T)+f'(T)]$ $\rightarrow f' = 3c/(2R).f^2$
$\ddot{r} = -r.c/R.[-c/R.f^2(T)+3c/(2R).f^2(T)]$
$\ddot{r} = -r.c/R.[-c/R.f^2(T)+3c/(2R).f^2(T)]$
$\ddot{r} = -r.c^2/R^2.[-f^2(T)+3/2.f^2(T)]$
$\ddot{r} = -r.c^2/R^2.f^2(T).[-1+3/2]$
$\ddot{r} = -\frac{1}{2}.r.c^2/R^2.f^2(T)$

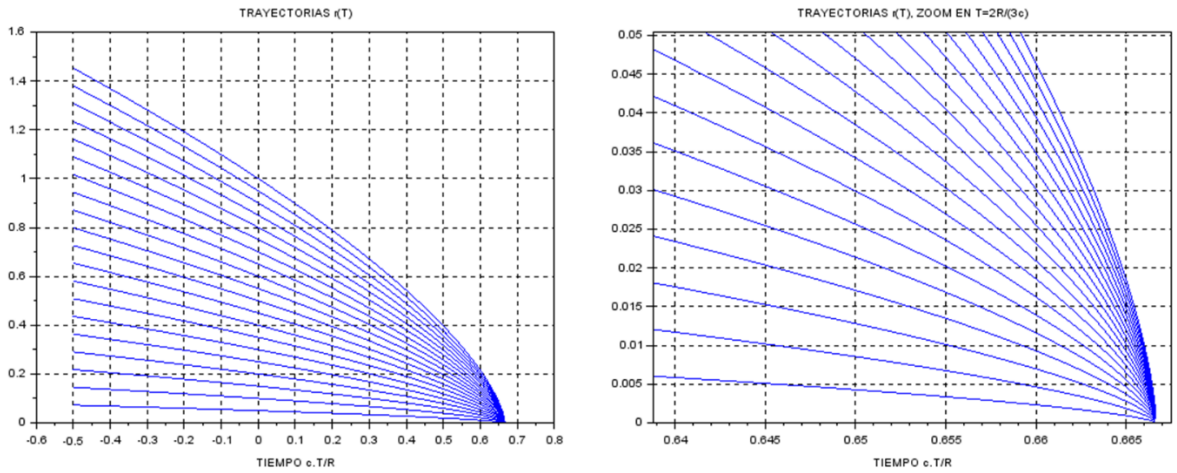
Formamos un cuadrivector de aceleración gravitatoria con $g^0=cT\ddot{}$, $g^r=r\ddot{}$, $g^\theta=\theta\ddot{}$, $g^\varphi=\varphi\ddot{}$
El único componente no nulo es $g^r = r\ddot{} = -\frac{1}{2}.r.c^2/R^2.f^2(T)$
Su divergencia covariante, que en el capítulo 9.5 bautizamos informalmente como "laplaciano relativista del potencial", da lugar a esta ecuación:

$\nabla_\alpha g^\alpha = -4.\pi.G.\rho$
$1/r^2.\partial_r(r^2.g^r) = -4.\pi.G.\rho$
$1/r^2.\partial_r[r^2.-\frac{1}{2}.r.c^2/R^2.f^2(T)] = -4.\pi.G.\rho$
$1/r^2.\partial_r[r^3].c^2/R^2.f^2(T) = 8.\pi.G.\rho$
$1/r^2.\partial_r[3r^2].c^2/R^2.f^2(T) = 8.\pi.G.\rho$
$3.c^2/R^2.f^2(T) = 8.\pi.G.\rho$
$f^2(T) = 8/3.\pi.G.R^2/c^2.\rho$ $\rightarrow$sustituimos $\rho(T)=\rho_0.f^2(T)$
$f^2(T) = 8/3.\pi.G.R^2/c^2.\rho_0.f^2(T)$
$1 = 8/3.\pi.G.R^2/c^2.\rho_0$

Y nos queda exactamente la relación entre parámetros constantes.

Trayectorias:
Podemos calcular en forma exacta las trayectorias de cada partícula de polvo cósmico (en forma exacta porque es una distribución idealizada de materia).

$\dot{r} = -v(r,T) = -c.r/R.f(T)$
$dr/dT = -c.r/R.f(T)$
$dr/r = -c/R.f(T).dT$ $\rightarrow$sustituimos f(T)
$dr/r = -c/R.[1-3cT/(2R)].dT$
$dr/r = (2/3).[1-3cT/(2R)].(-3c)/(2R).dT$ $\rightarrow$integramos los diferenciales exactos
$\log(r/r0) = 2/3.\log[1-3cT/(2R)]$
$\log(r/r0) = \log\{[1-3cT/(2R)]^{2/3}\}$
$r(T) = r(0).[1-3cT/(2R)]^{2/3}$



Los cálculos teóricos los realizamos con una distribución continua de materia $\rho(T)$.

A los efectos del Cálculo Numérico, las gráficas siguen el rastro de un conjunto limitado de partículas, inicialmente equiespaciadas en T=0. Se puede ver que los sucesivos cortes T=cte (verticales en el dibujo) mantienen la separación uniforme, lo que es consistente con la hipótesis de que 'ρ' variaba solo en el tiempo pero era homogénea en el espacio.
El zoom alrededor de T=2R/(3c) muestra que las funciones de exponente fraccionario (2/3) tienen pendiente vertical →todas las partículas llegan a r=0 en el mismo instante y con velocidad infinita. Al concentrarse toda la materia en el origen r=0, la densidad tendería a infinito.
Eso sería si se mantuvieran las condiciones idealizadas propuestas al inicio de este sección. Otra hipótesis más verosímil sería que se desarrollara una presión y que el astro en formación se estabilizara en un cierto tamaño finito; ahí dejarían de valer nuestras hipótesis de simplificación.

Análisis métrico:
Llamamos $R_a(T)$ al límite instantáneo de la nube de polvo, R_a a su valor en T=0.
La relación entre ambos es la que siguen las partículas de la periferia de la nube:

$$R_a(T) = R_a.[1 - 3cT/(2R)]^{2/3}$$
$$R_a(T)^3 = R_a^3.[1 - 3cT/(2R)]^2$$
$$R_a(T)^3.f(T)^2 = R_a^3$$

Estudiamos la evolución espacial y temporal del coeficiente métrico g_{00}:

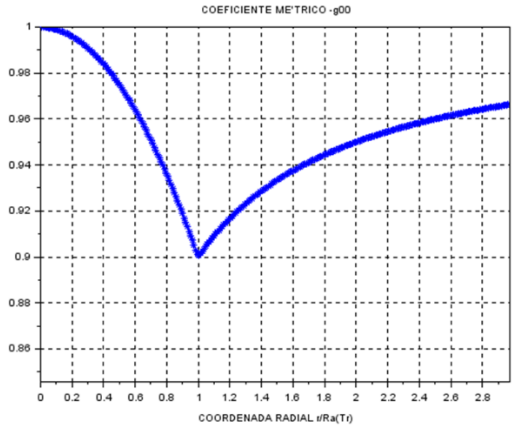
$$-g_{00} = 1 - v^2/c^2$$
$$-g_{00} = 1 - c^2.r^2/R^2.f(T)^2/c^2$$
$$-g_{00} = 1 - r^2/R^2.f(T)^2$$ →hacemos aparecer la frontera de la nube
$$-g_{00} = 1 - r^2/R^2.R_a^3/R_a(T)^3$$
$$-g_{00} = 1 - r^2/R^2.R_a^3/R_a(T)^3$$

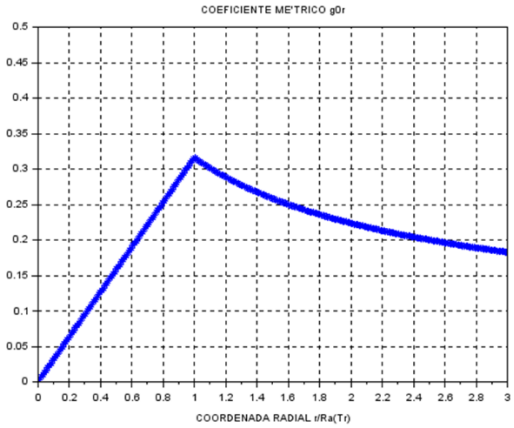
Dado un punto ubicado en coordenada 'r', en el instante 'T_r' en que la cáscara exterior de la nube pasa por allí se cumple $r=R_a(T_r)$ y en ese evento el coeficiente métrico vale $-g_{00} = 1 - R_a^3/R^2/r = 1 - r_S/r$.
Siendo $r_S=R_a^3/R^2$
Debemos demostrar que este parámetro es exactamente el radio de Schwarzschild total, el asociado a la cantidad total de masa que forma parte de nuestro astro en formación.

$$r_S=R_a^3/R^2$$ →sustituimos la relación entre constantes definidas antes $1 = 8/3.\pi.G.\rho_0.R^2/c^2$
$$r_S=R_a^3.8/3.\pi.G.\rho_0/c^2$$
$$r_S=2.4/3.\pi.R_a^3G.\rho_0/c^2$$
$$r_S=2.Volumen.G.\rho_0/c^2$$
$$r_S=2.Volumen.G.\rho_0/c^2$$
$$r_S=2.M.G/c^2$$

Reflexión: Estamos utilizando muchos argumentos de Física Clásica, incurriendo permanentemente en un riesgo de escribir por descuido alguna relación matemática que no sea exacta sino solo una aproximación para gravedades débiles.
En este caso nos preguntamos: ¿está bien calculado el volumen? Y nos respondemos: sí, porque los cortes espaciales T=cte de este espaciotiempo son euclídeos como si r, θ y φ fueran coordenadas esféricas.

Entonces, en el punto 'r' y tiempo T=Tr donde pasa la cáscara límite de la bola $R_a(Tr)=r$, vale $-g_{00} = 1 - r_S/r$.
En ese mismo punto espacial 'r', para tiempos T>Tr, la métrica ya no varía más en el tiempo.
Queda estable, congelada en el valor que tuvo cuando pasó la nube.
Lo mismo ocurre con los otros coeficientes métricos $g_{rr}(r,T)$ y $g_{0r}(r,T)$.
Lo visualizamos gráficamente:





La métrica interior que estamos calculando en esta sección enlaza sin discontinuidades con la métrica de vacío de Gullstrand-Painlevé en las regiones que van quedando libres de materia, cuando la nube "ya pasó de largo" en su proceso de contracción.

Otra reflexión: ¿Es razonable que la métrica no varíe más en el tiempo? Dado un radio 'r', la materia que quedó contenida entre ese radio y el origen se está moviendo cada vez más rápido, y podría ser esperable un incremento gravitatorio. Lo cierto es que no ocurre tal incremento, la función ρ(T) ya contiene los efectos relativistas, ya es densidad de masa propia + energía cinética.
Desde que nombramos por primera vez el concepto "masa relativista" en el capítulo 5, advertimos que era un nombre que debía manejarse con mucha cautela porque no se trata de un verdadero escalar invariante. En aquel contexto el verdadero invariante relativista era la masa propia m_o.

En el contexto de esta nube de polvo en contracción, el invariante que tenemos es la traza del tensor de energía-impulso. La calculamos con los conceptos del capítulo 10.
Para polvo cósmico sin presión,

$T^{\alpha}{}_{\beta} = \rho.U^{\alpha}U_{\beta}$ →contracción β=α
$T^{\alpha}{}_{\alpha} = \rho.U^{\alpha}U_{\alpha}$
$T^{\alpha}{}_{\alpha} = \rho.(-c^2)$
$T = -\rho.c^2$

Entonces esta 'ρ' que estamos manejando es invariante porque es proporcional a la traza. Cerramos esta sección calculando explícitamente el tensor de energía impulso $T^{\alpha}{}_{\beta} = \rho.U^{\alpha}U_{\beta}$ y su divergencia.

$U^{\alpha}=(c.T^{\cdot}, r^{\cdot}, \theta^{\cdot}, \varphi^{\cdot})$
$U^{\alpha}=(c , -v(r,T) , 0 ,0)$

U_{β} lo calculamos a partir de los momentos lagrangeanos de cada partícula de polvo; debe dar $P_{\beta}=m_o.U_{\beta}$.

$$\mathcal{L} = -m_o.c^2.\sqrt{T^{\cdot 2} - [r^{\cdot} + v(r,T).T^{\cdot}]^2/c^2 - r^2.[\theta^{\cdot 2} + sen^2\theta\ \varphi^{\cdot 2}]/c^2}$$

→Radial:

$P_r=\partial\mathcal{L}/\partial r^{\cdot} = -m_o.c^2/2\sqrt{}.(-2/c^2).[r^{\cdot} + v(r,T).T^{\cdot}] = 0$ por la condición de caída libre

→Temporal:

$P_0=\partial\mathcal{L}/\partial(c\dot{T}) = -m_o.c/2\sqrt{}.\{ 2\ T^{\cdot} - 2.[r^{\cdot} + v(r,T).T^{\cdot}].v(r,T)/c^2 \}$
$P_0= -m_o.c.T^{\cdot}$

→Angular:

$P_{\theta} = P_{\varphi} = 0$

Nos queda:
$U_{\beta}=(-c , 0 , 0 ,0)$

Construimos entonces el producto tensorial $T^{\alpha}{}_{\beta} = \rho.U^{\alpha}U_{\beta}$:

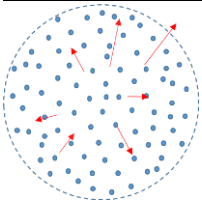
$\alpha \setminus \beta$	cT	r	θ	φ
cT	$-\rho(T).c^2$	0	0	0
R	$-\rho(T).v(r,T).c$	0	0	0
Θ	0	0	0	0
φ	0	0	0	0

La divergencia covariante se obtiene por derivada del producto:

$$\nabla_\alpha T^\alpha{}_\beta = \nabla_\alpha(\rho.U^\alpha)U_\beta + \rho.U^\alpha\nabla_\alpha U_\beta$$

La parte celeste es nula porque lo aseguramos al calcular la conservación de la masa por la ecuación de continuidad de los flujos radiales.
Pero eso solo no alcanzaría, equivaldría a tratar a la columna-0 del tensor de energía-impulso como si fuera un vector.
Falta asegurar que la parte gris también es nula, y eso lo hicimos por la ecuación geodésica.
$U^\alpha\nabla_\alpha U_\beta = DU_\beta/D\tau$
Esto es nulo porque $U_r = \dot{r} + v(r,T).\dot{T}$ se mantiene nulo en toda la trayectoria de caída libre.

11.5.3 Polvo en expansión:

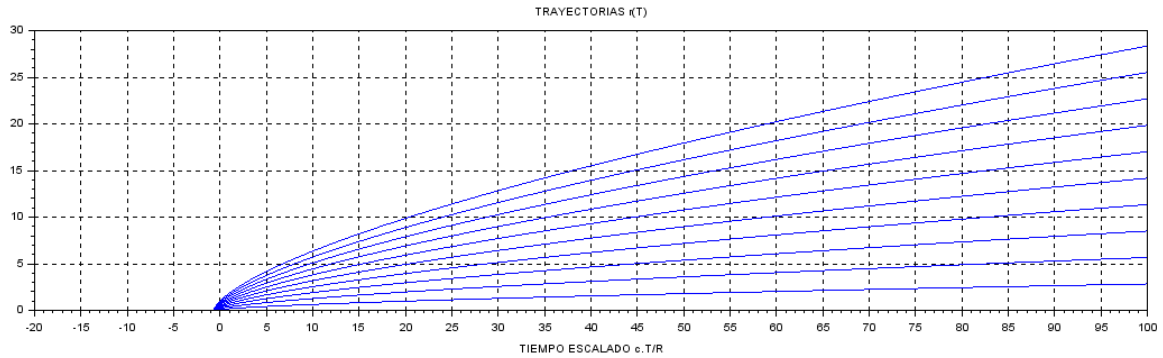


Pasamos a analizar la situación opuesta a la anterior: ahora el movimiento es radial saliente.
El tratamiento matemático es muy parecido al que ya hicimos, apenas cambian algunos signos.
También cambian algunas intepretaciones, por ejemplo, la hipótesis de que no consideramos la influencia de ningún otro objeto en el Universo. Nuestro polvo, al expandirse, pasa a llenar gradualmente todo el espacio y se convierte en el protagonista principal, en el propio constituyente del Universo. Este modelo podría ser un principio de descripción del Universo a escala cosmológica.
Una de las preocupaciones a esa escala es que la gravedad es atractiva, todos los objetos se atraen unos a otros y podrían conducir a un colapso gravitacional. La idea de un *Universo en expansión* sortea esta preocupación, o al menos la pospone para un futuro más lejano. Si las masas se están alejando unas de otras, la atracción gravitatoria producirá como primer efecto un freno o desaceleración.

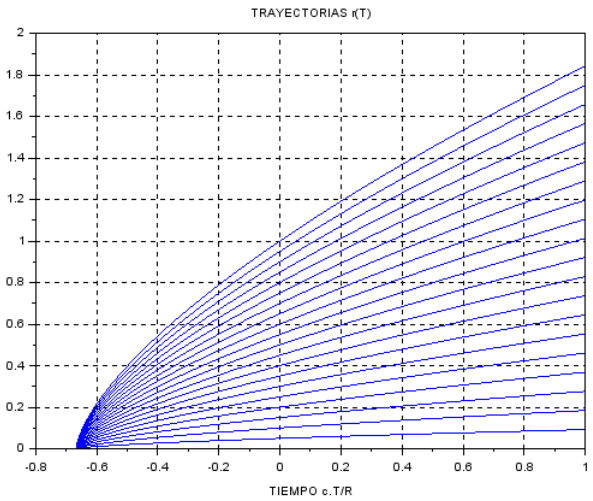
Métrica: $dS^2 = -(c.dT)^2 + [dr - v(r,T).dT]^2 + r^2.(d\theta^2 + sen^2\theta\, d\varphi^2)$
Ecuación geodésica: $r^{\cdot} = +v(r,T).T^{\cdot}$, $T^{\cdot}=1$.
Evolución temporal: $f(T) = 1/[1 + 3.cT/(2R)]$
Las trayectorias son funciones crecientes con exponente menor a 1, es decir, dirección asintótica horizontal.

$$r(T)=r(0).[1 +3cT/(2R)]^{2/3}$$

Es el significado de la velocidad de escape: si cada partícula tiene una velocidad radial saliente exactamente igual a la de escape, eventualmente llegará al infinito con velocidad nula.



Estas funciones presentan una discontinuidad en un tiempo pasado T= -2R/3c



En ese tiempo pasado, según este modelo, toda la materia estuvo concentrada en un punto (densidad infinita) y salió disparada en todas las direcciones con una velocidad inicial infinita. Este imagen recuerda a lo que se llama BIG-BANG o Gran Explosión.

11.5.4 Introducción a la Cosmología:

Ya que estamos tocando marginalmente el área de la Cosmología, podríamos hacer algunas reflexiones en busca de modelos más realistas y más ajustados a las observaciones astronómicas.
Lo primero sería resolver el problema del "origen privilegiado": ¿dónde se originó el mundo? ¿dónde está ubicada la coordenada r=0? ¿Qué significado tiene el eje polar 'θ'?

Pensemos lo que ocurre en una cáscara esférica: muchas expresiones matemáticas (por ejemplo la métrica $dS^2 = R^2\, d\theta^2 + R^2.sen^2\theta.d\varphi^2$) muestran una dependencia en el ángulo polar θ y parecen asignarle cierto protagonismo al polo θ=0. Pero no hay tal protagonismo; la superficie es completamente homogénea y perfectamente podríamos elegir otro polo y otro ángulo polar θ'.
La métrica de este casquete esférico es: $dS^2 = R^2\, d\theta^2 + R^2.sen^2\theta.d\varphi^2$
Si hacemos el cambio de variable $r=R.sen\theta$, tenemos

$dr = R.cos\theta.d\theta$
$dr^2 = R^2.cos^2\theta.d\theta^2$
$dr^2 = R^2.(1 - sen^2\theta).d\theta^2$
$dr^2 = R^2.(1 - r^2/R^2).d\theta^2$
$dr^2/(1 - r^2/R^2) = R^2.d\theta^2$

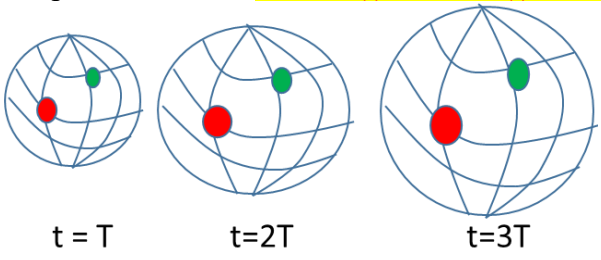
Eliminamos la variable θ de la métrica y nos queda:

$dS^2 = R^2\, d\theta^2 + R^2.sen^2\theta.d\varphi^2$
$dS^2 = dr^2/(1 - r^2/R^2) + r^2.d\varphi^2$

Los habitantes de la variedad 2D estarían describiendo el mundo en coordenadas parecidas a las polares planas (1 distancia polar + 1 ángulo), aunque con una distorsión radial que evidencia que existe una curvatura intrínseca. El protagonismo del origen r=0 es solo aparente, porque podemos deshacer el cambio de variable y volver al θ, y luego elegir otro polo y otro ángulo polar θ', y finalmente rehacer el cambio de variable r'=R.senθ' →Podemos elegir como origen al punto que queramos.

En un hipotético espacio 4D con coordenadas hiperesféricas, podríamos pensar en subconjuntos de R constante con métrica según vimos en 8.1.8: $dS^2=R^2.d\xi^2 + R^2.sen^2\xi\, d\theta^2 + R^2.sen^2\xi.sen^2\theta.d\varphi^2$
Como habitantes de la variedad 3D nos moveríamos en 3 coordenadas angulares. Si convertimos una de ellas a distancia $r=R.sen\xi$, operamos en forma similar a la cáscara esférica y nos queda una métrica:
$dS^2=dr^2/(1-r^2/R^2) + r^2.d\theta^2 + r^2.sen^2\theta.d\varphi^2$
En las cercanías del origen r=0 se parece a nuestras coordenadas esféricas, con la curvatura evidenciada en el coeficiente $g_{rr}\neq 1$. Una hipotética métrica con esta forma nos induciría a pensar que r=0 es un punto privilegiado, cuando en realidad podríamos deshacer el cambio de variable $r=R.sen\xi$, definir otro polo ("hiperpolo") y otro ángulo ξ' referido al nuevo polo.

El segundo aspecto a analizar es cómo modelar un escenario en el que todos los puntos se están alejando de todos los demás. Porque eso es exactamente lo que surge de las observaciones astronómicas y forma parte del llamado **efecto Hubble**. La luz proveniente de galaxias remotas nos llega con corrimiento espectral hacia el rojo, como si nos estuviéramos alejando unos de otros. Y el corrimiento Doppler es más intenso cuanto mayor es la distancia.
Volvemos al casquete 2D embebido en 3D, que es más simple de visualizar, y pensemos en una variación temporal del radio: $dS^2 = R(t)^2\, d\theta^2 + R(t)^2.sen^2\theta.d\varphi^2$



Como si fuera un globo que se está inflando gradualmente.

Los habitantes de la variedad-2D, aunque intenten quedarse quietos manteniendo constantes sus coordenadas (θ,φ), miden de cualquier manera una variación temporal de la métrica que se interpreta como un alejamiento de todos contra todos.

En base a estos argumentos podemos pensar en una métrica relativista con esta forma:

$$dS^2= -(c.dt)^2 + a(t)^2.[dr^2/(1-r^2/R^2) + r^2.d\theta^2 + r^2.sen^2\theta.d\varphi^2]$$

Para simplificar los cálculos matemáticos tomamos el límite en que el radio de curvatura de la parte espacial tiende a infinito $R\to\infty$. La expansión la modelamos con el factor de escala a(t).

$$dS^2= -(c.dt)^2 + a(t)^2.[dr^2 + r^2.d\theta^2 + r^2.sen^2\theta.d\varphi^2]$$

Lo que nos permite utilizar coordenadas cartesianas para sustituir el corchete espacial [].

$$dS^2= -(c.dt)^2 + a(t)^2.[dx^2 + dy^2 + dz^2]$$

$$\mathcal{L}(\tau)= -m_o.c^2.\sqrt{\dot{t}^2 - a^2(t).[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2]/c^2}$$

Calculamos los símbolos de Christoffel por el método geodésico del Lagrangeano.

→temporal)

$P_{ct}=\partial\mathcal{L}/\partial(c\dot{t}) = -m_o.c.\dot{t}$

$\partial\mathcal{L}/\partial(ct) = m_o.c/2\sqrt{}.2.a(t).a'(t).[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2]/c^2 = m_o.a(t).a'(t)/c.[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2]$

$dP_{ct}/d\tau - \partial\mathcal{L}/\partial(ct) =0$

$-m_o.c.\ddot{t} - m_o.a(t).a'(t)/c.[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2]=0$

$c.\ddot{t} + a(t).a'(t)/c.[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2]=0$

$\to\Gamma^0_{xx} = \Gamma^0_{yy} = \Gamma^0_{zz} =a(t).a'(t)/c$

→espacial)

$P_x=\partial\mathcal{L}/\partial\dot{x} = m_o.a^2(t).\dot{x}$

$\partial\mathcal{L}/\partial x=0$

$dP_x/d\tau - \partial\mathcal{L}/\partial x =0$

$a^2(t).\ddot{x} + 2.a(t)a'(t).\dot{t}.\dot{x}=0$

$\ddot{x} + 2a'(t)/a(t).\dot{t}.\dot{x}=0$

$\ddot{x} + 2/c.a'(t)/a(t).c\dot{t}.\dot{x}=0$

$\to\Gamma^x_{0x} = \Gamma^x_{x0} = 1/c.a'(t)/a(t)$

Por isotropía espacial podemos replicar estos valores a las otras direcciones.

$\to\Gamma^y_{0y} = \Gamma^y_{y0} = \Gamma^z_{0z} = \Gamma^z_{z0} =1/c.a'(t)/a(t)$

$[C0]=\Gamma^\lambda_{\mu 0}$

	0	x	y	z
0				
x		a'/(a.c)		
y			a'/(a.c)	
z				a'/(a.c)

$[Cx]=\Gamma^\lambda_{\mu x}$

	0	x	y	z
0		a.a'/c		
x	a'/(a.c)			
y				
z				

$[Cy]= \Gamma^\lambda_{\mu y}$

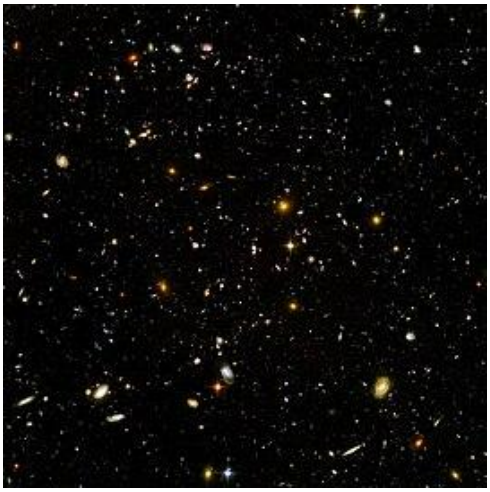
	0	x	y	z
0			a.a'/c	
x				
y	a'/(a.c)			
z				

$[Cz]= \Gamma^\lambda_{\mu z}$

	0	r	y	z
0				a.a'/c
r				
y				
z	a'/(a.c)			

Antes de emprender los cálculos del tensor de Ricci, tratemos de razonar sobre las expresiones que vienen presentándose. El "polvo" que forma parte del Universo debería modelarse como formado por partículas "puntuales" de masa m_o, tal que cada una de ellas debe obedecer la ecuación geodésica en $\mathcal{L}(X^\alpha,\dot{X}^\alpha,\tau)$.

Observación: A escala cósmica, los "puntos" no serían planetas sino más bien galaxias o agrupaciones de galaxias. La hipótesis parece confirmarse por las medidas astronómicas, ya que apuntamos los telescopios hacia cualquier lugar del cielo, con suficiente aumento, y parece observarse una homogeneidad en todas las regiones y en todos los ángulos de enfoque.



<Fuente https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/2/2f/Hubble_ultra_deep_field.jpg/270px-Hubble_ultra_deep_field.jpg>

Entonces estos "puntos" siguen una ecuación geodésica en la cual $x^{\cdot\cdot}$ es proporcional a $-x^{\cdot}$.
Si la condición inicial es que estamos quietos $x^{\cdot}=0$, la aceleración va a ser nula $x^{\cdot\cdot}=0$.
El resto de las masas no nos va a atraer hacia ningún centro de masas, porque ese concepto no se aplica a esta geometría. Lo mismo para las restantes coordenadas 'y', 'z'.
Por otro lado, si todas las coordenadas se mantienen constantes, $t^{\cdot}=1$ cte y $t^{\cdot\cdot}=0$.
No hay ningún factor de dilatación temporal y nuestro tiempo propio es el tiempo Universal 't'.
Sabemos que en la realidad las galaxias se mueven unas respecto a las otras, pero en este capítulo consideramos que esos movimientos son fluctuaciones alrededor de una solución de equilibrio.
Lo que vamos a buscar es esa solución de equilibrio con $x^{\cdot}=y^{\cdot}=z^{\cdot}=0$. Y resolver la incógnica a(t).

<u>Conservación de la energía</u>:
Las hipótesis de homogeneidad y de isotropía requieren que haya una densidad de materia homogénea en el espacio, aunque variable con el tiempo de acuerdo con la expansión ρ(t). ¿Cómo evoluciona esta densidad?
Pensemos en la imagen del globo que se infla, y supongamos una densidad superficial de materia homogénea σ_m. Si el globo se está inflando, su tamaño (área) crece con factor R^2 y la masa se debe mantener constante→ entonces la densidad debe variar con el inverso $1/R^2$. En una dimensión adicional, si ρ_m describe a la densidad volumétrica debería variar como $1/R^3$.
Para simplificar los cálculos supusimos un radio de curvatura infinito, pero de cualquier manera los razonamientos deberían extenderse utilizando el factor de escala a(t), y llegaríamos a través de este argumento primitivo a la sospecha de que debería cumplirse: $\rho = \rho_0/a^3$.

Vamos a agregarle un poco de rigor relativista a este razonamiento.
En un cierto volumen Δx, Δy, Δz formado por partículas solidarias al Universo (quietas) la masa total en tiempo 't' es M=ρ(t).Vol(t)=constante.

$Vol(t)= \sqrt{-g}.\ \Delta x.\Delta y.\Delta z$

El determinante métrico es $g=g_{00}.g_{xx}.g_{yy}.g_{zz} = (-1).a^2(t).a^2(t).a^2(t)= (-1).a^6(t) \rightarrow \sqrt{-g} =a^3(t)$

$M=\rho(t).Vol(t)=$constante.
$M=\rho(t).a^3(t)\Delta x.\Delta y.\Delta z$

Suponemos que t=0 es nuestra "época cósmica" actual en la cual la escala es unitaria a(t)=1 en t=0.
En épocas cósmicas pasadas t<0, a(t) era menor. En épocas futuras t>0, a(t) será mayor.
$M/(\Delta x.\Delta y.\Delta z) = \rho_o=\rho(0)$ = densidad de referencia.
→ $\rho(t)=\rho_o/a^3(t)$

El máximo rigor relativista lo lograríamos calculando la derivada covariante del tensor de energía-impulso.
Para polvo cósmico $T^{\alpha}{}_{\beta}=\rho.U^{\alpha}.U_{\beta}$

La materia constituyente del Universo tiene cuadrivelocidad de reposo $U^\alpha=(c,0,0,0)$ $U_\beta=(-c,0,0,0)$

α \ β	Ct	x	y	Z
Ct	$-\rho(t).c^2$	0	0	0
X	0	0	0	0
y	0	0	0	0
z	0	0	0	0

Su derivada covariante es, según fórmula completa de 8.3.5:

$\nabla_\lambda T^\alpha{}_\beta=\partial_\lambda T^\alpha{}_\beta + \Gamma^\alpha{}_{\lambda\sigma}T^\sigma{}_\beta - T^\alpha{}_\sigma\,\Gamma^\sigma{}_{\lambda\beta}$ →evaluamos β=0, única posibiliad no trivial

$\nabla_\lambda T^\alpha{}_0=\partial_\lambda T^\alpha{}_0 + \Gamma^\alpha{}_{\lambda\sigma}T^\sigma{}_0 - T^\alpha{}_\sigma\,\Gamma^\sigma{}_{\lambda 0}$ →término rojo = producto matricial [T].[Co]

$\nabla_\lambda T^\alpha{}_0=\partial_\lambda T^\alpha{}_0 + \Gamma^\alpha{}_{\lambda\sigma}T^\sigma{}_0 - T^\alpha{}_\sigma\,\Gamma^\sigma{}_{\lambda 0}$ →divergencia: contracción con λ=α

$\nabla_\alpha T^\alpha{}_0=\partial_\alpha T^\alpha{}_0 + \Gamma^\alpha{}_{\alpha\sigma}T^\sigma{}_0 - T^\alpha{}_\sigma\,\Gamma^\sigma{}_{\alpha 0}$

Ahora el término rojo $T^\alpha{}_\sigma\,\Gamma^\sigma{}_{\alpha 0}$ es la traza del producto matricial. Una doble suma en α y en σ.

rojo=$T^\alpha{}_\sigma\,\Gamma^\sigma{}_{\alpha 0}$ →simetría de T

rojo=$T^\sigma{}_\alpha\,\Gamma^\sigma{}_{\alpha 0}$

No necesitamos hacer el producto matricial completo. Puesto así queda como una suma de 16 términos donde cada casillero fila=σ columna=α de [T] se multiplica por su correspondiente del Christoffel [Co]. Ambas matrices son diagonales. [T] tiene valores no nulos solamente en σα=00, mientras que el Christoffel los tiene en σα=xx,yy,zz. →El aporte rojo es nulo.

Lo que queda es:

$\nabla_\alpha T^\alpha{}_0=\partial_\alpha T^\alpha{}_0 + \Gamma^\alpha{}_{\alpha\sigma}T^\sigma{}_0$ →renombramos índices sumados

$\nabla_\alpha T^\alpha{}_0=\partial_\alpha T^\alpha{}_0 + \Gamma^\sigma{}_{\sigma\alpha}T^\alpha{}_0$

$\nabla_\alpha T^\alpha{}_0=\partial_\alpha T^\alpha{}_0 + \Gamma^\sigma{}_{\sigma\alpha}T^\alpha{}_0$ →aplicamos resultado del capítulo 9.2

$\nabla_\alpha T^\alpha{}_0=\partial_\alpha T^\alpha{}_0 + 1/\sqrt{\ }\,\partial_\alpha(\sqrt{\ })T^\alpha{}_0$

$\nabla_\alpha T^\alpha{}_0=\partial_\alpha T^\alpha{}_0 + 1/\sqrt{\ }\,\partial_\alpha(\sqrt{\ })T^\alpha{}_0$

$\nabla_\alpha T^\alpha{}_0=(1/\sqrt{\ }).\partial_\alpha(\sqrt{\ }\,.\,T^\alpha{}_0)$

Nos da exactamente lo que obtuvimos al calcular los volúmenes con $\sqrt{\ }=\sqrt{-g}=a^3(t)$

<u>Desviación geodésica</u>:

Tenemos hasta el momento 2 incógnitas a(t), ρ(t) y una única ecuación que las relaciona $\rho(t)=\rho_0/a^3(t)$.
La segunda ecuación nos la da la deriva geodésica.
Pensamos en un cubo de aristas Δx, Δy, Δz lleno de materia cósmica en reposo.
Las distancias métricas de cada arista son $\Delta S_x=a(t).\Delta x$, $\Delta S_y=a(t).\Delta y$, $\Delta S_z=a(t).\Delta z$.
La deriva en cualquiera de las coordenadas es:

$d^2\Delta S_x/d\tau^2= a''(t).\Delta x$

$(1/\Delta S_x).d^2\Delta S_x/d\tau^2= a''(t)/a(t)$

La fórmula de desviación geodésica en las 3 coordenadas es:

$(1/\Delta S_x).d^2\Delta S_x/d\tau^2 +(1/\Delta S_y).d^2\Delta S_y/d\tau^2 +(1/\Delta S_z).d^2\Delta S_z/d\tau^2= -4.\pi.G.\rho(t)$

$3.a''(t)/a(t) = -4.\pi.G.\rho(t)$

Esta es la segunda ecuación diferencial que necesitamos. Ahora las combinamos y nos queda una sola en la variable a(t) (el factor de escala del Universo).

$3.a''(t)/a(t) = -4.\pi.G.\rho(t)$ →$\rho(t)= \rho_0/a^3(t)$

$3.a''/a = -4.\pi.G.\rho_o/a^3$

$a'' = -4/3.\pi.G.\rho_o/a^2$

Definimos un parámetro 'R' con unidades de distancia, igual que hicimos con el modelo del polvo en expansión: $8/3.\pi.G.\rho_o=c^2/R^2$

$a'' = -1/2.c^2/R^2/a^2$

$a'' = -1/2.c^2/R^2/a^2$ →$a'' = ½.d(a'^2)/da$

$½.d(a'^2)/da = -1/2.c^2/R^2/a^2$

$d(a'^2)/da = -c^2/R^2/a^2$

$d(a'^2) = -da.c^2/R^2/a^2$ →diferenciales exactos

$a'^2 = c^2/R^2(1/a - 1/a_{stop})$

Llamamos a_{stop} al valor del factor de escala cuando se detiene la expansión a'(t)=0 y se convierte en una contracción. A este nivel no estamos interesados en modelos cosmológicos avanzados, nos importa solo obtener una solución exacta lo más simple posible. Exploramos entonces lo que resulta de suponer $a_{stop} = \infty$, una especie de expansión "eterna" cada vez más lenta que se frena en el infinito.

$a'^2 = c^2/R^2/a$

$a' = \pm\, c/R/\sqrt{a}$ →del ± elegimos el signo +, etapa actual de expansión a'>0

$\sqrt{a}\,.\,a' = c/R$

$a^{1/2}\, da/dt = c/R$ →integramos por variables separables

$a^{1/2}\, da = c/R.dt$

$(a^{3/2}-1)/(3/2) = ct/R$

$(a^{3/2}-1) = 3ct/2R$

$a^{3/2} = 1 + 3ct/2R$

$$a(t) = [\,1 + 3ct/2R\,]^{2/3}$$

Llegamos a la misma expansión desacelerada que en el modelo del polvo, aunque ahora la interpretación de los factores de evolución temporal es distinta.

Vuelve a aparecer el concepto de BIG-BANG: un hipotético tiempo en un pasado remoto t= –2R/3c en el que el factor de escala era cero y la densidad era infinita.

<u>Tensores de curvatura</u>:

Concluimos esta sección calculando el tensor de Riemann y luego el Ricci.

La isotropía espacial asegura que son necesarios muy pocos cálculos.

El "sector" α=0 β=x es representativo de todos los sectores tiempo-espacio: 0y, 0z.

El sector α=x β=y es representativo de todos los sectores espacio-espacio: xz, yz.

$[C0]=\Gamma^{\lambda}_{\mu 0}$ $[Cx]=\Gamma^{\lambda}_{\mu x}$ $[Cy]=\Gamma^{\lambda}_{\mu y}$ $[Cz]=\Gamma^{\lambda}_{\mu z}$

	0	x	y	Z		0	x	y	z		0	x	y	z		0	R	y	z
0							a.a'/c						a.a'2c						a.a'/c
x		a'/(a.c)				a'/(a.c)													
y			a'/(a.c)								a'/(a.c)								
z				a'/(a.c)												a'/(a.c)			

- sector αβ=0x, λμ=0x

  R^0_{x0x}= derivadas + matrices

derivadas=$\partial_0\Gamma^0_{xx} - \partial_x\Gamma^0_{x0} = \partial_{ct}(a.a'/c) - \partial_x() = 1/c^2.(a.a'' + a'^2)$

matrices = [C0,fil-0][Cx,col-x] –[Cx,fil-0][C0,col-x]

				a.a'/c							
										a'/(a.c)	
				0			a.a'/c			a'^2/c^2	

Juntamos las 4 contribuciones

$R^0_{x0x} = a.a''/(c^2) + a'^2/(c^2) - (0) + (0) - (a'^2/c^2)$

$$R^0_{x0x} = a(t).a''(t)/(c^2)$$

- sector αβ=0x, λμ=x0

  R^{x}_{00x}= derivadas + matrices

derivadas=$\partial_0\Gamma^{x}_{0x} - \partial_x\Gamma^{x}_{00} = \partial_{ct}(a'/ac) - \partial_x() = 1/c^2.(a''/a - a'^2/a^2)$

matrices = [C0,fil-x][Cx,col-0] –[Cx,fil-x][C0,col-0]

									0
				a'/(a.c)					0
									0
									0
	a'/(a.c)			$a'^2/(a^2c^2)$		a'/(a.c)			0

Juntamos las 4 contribuciones

$R^{x}_{00x}= 1/c^2.(a''/a - a'^2/a^2) - (0) + (a'^2/(a^2c^2)) - (0)$

$R^{x}_{00x}=a''(t)/[a(t)\ c^2]$ →antisimetría

$R^{x}_{0x0}= -a''(t)/[a(t)\ c^2]$ →lo extendemos a R^{y}_{0y0} y R^{z}_{0z0}.

xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

Ricci temporal:

$R_{00} = R^{x}_{0x0} + R^{y}_{0y0} + R^{z}_{0z0}$

$R_{00} = -3.a''(t)/[a(t)\ c^2]$

Confirmamos el resultado de la deriva geodésica $R_{00}=4\pi G\rho/c^2$. En el capítulo 9.2.4 se razonaba en forma aproximada para ambientes de campos débiles, pero aquí es una ecuación exacta.

Continuamos con los restantes sectores de Riemann

xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

- sector αβ=xy, λμ=xy

  R^{x}_{yxy}= derivadas + matrices

derivadas=$\partial_x\Gamma^{x}_{yy} - \partial_y\Gamma^{x}_{yx}$ =0 porque no hay dependencias espaciales

matrices = [Cx,fil-x][Cy,col-y] –[Cy,fil-x][Cx,col-y]

				a.a'/c					0
									0
									0
									0
a'/(a.c)				a'^2/c^2		0	0	0	0	0

Juntamos las 4 contribuciones

$R^{x}_{yxy}= (0) - (0) + (a'^2/c^2) - (0)$

$R^{x}_{yxy}= a'(t)^2/(c^2)$ →lo replicamos a todas las combinaciones espacio-espacio

Con esto ya podemos calcular los Ricci espaciales.

$R_{xx} = R^{0}_{x0x} + R^{y}_{xyx} + R^{z}_{xzx}$

$R_{xx} = a.a''/c^2 + a'^2/c^2 + a'^2/c^2$

$R_{xx} = (a.a''+2\ a'^2)/c^2$

Durante la resolución de la función a(t), uno de los pasos intermedios era que $a'^2=c^2/R^2/a$.

Otro paso era $a''= - c^2/R^2/(2a^2)$. Si los combinamos tenemos $a''= -a'^2/(2a)$

Sustituimos en todos los componentes del tensor de Ricci.

$R_{xx} = (1/c^2).[-a'^2/2 + 2a'^2]$

$R_{xx} = 3a'^2/(2c^2)$

Subimos un índice: $R^{x}_{x}=g^{xx}.R_{xx} = (1/a^2).\ 3a'^2/(2c^2) = 3a'^2/(2a^2c^2)$

Operamos sobre el temporal:

$R_{00} = -\ 3\ a''/(a.c^2)$

$R_{00} = -3\,(-a'^2/2a)/(a.c^2)$

$R_{00} = 3a'^2/(2a^2c^2)$

Subimos un índice:

$R^0{}_0 = g^{00}.R_{00} = (-1).R_{00}$

$R^0{}_0 = -3a'^2/(2a^2c^2)$

Tenemos la condición $R^0{}_0 = -R^x{}_x$

El escalar de Ricci es $\mathcal{R} = R^0{}_0 + 3.R^x{}_x = -R^x{}_x + 3.R^x{}_x = 2.R^x{}_x$

➔ $R^0{}_0 = -\mathcal{R}/2$, $R^x{}_x = R^y{}_y = R^z{}_z = +\mathcal{R}/2$

<u>Ecuación de campo</u>:

El tensor de Ricci con varianza mixta tiene la siguiente estructura $R^\alpha{}_\beta$:

α \ β	cT	x	Y	z
ct	$-\mathcal{R}/2$	0	0	0
x	0	$\mathcal{R}/2$	0	0
y	0	0	$\mathcal{R}/2$	0
z	0	0	0	$\mathcal{R}/2$

Mientras que el tensor de energía-impulso con la misma varianza de índices $T^\alpha{}_\beta$ solo tiene poblado su $T^0{}_0$.
Este escenario estudiado no es compatible con ninguna ecuación de campo con proporcionalidad entre ambos tensores $R^\alpha{}_\beta = K.(T^\alpha{}_\beta)$. La ecuación de la traza reversada sí es compatible en forma exacta.
La traza verifica $T = T^0{}_0 = -\rho.c^2$
Definimos un tensor auxiliar con una barra o techo encima de la letra T: $\overline{T}^\alpha{}_\beta = T^\alpha{}_\beta - (T/2).g^\alpha{}_\beta$
Calculamos la diagonal de ese tensor:

$\overline{T}^0{}_0 = T^0{}_0 - (T/2).g^0{}_0 = T - (T/2) = (T/2)$

$\overline{T}^x{}_x = T^x{}_x - (T/2).g^x{}_x = 0 - (T/2) = -(T/2)$

$\overline{T}^y{}_y = T^y{}_y - (T/2).g^y{}_y = 0 - (T/2) = -(T/2)$

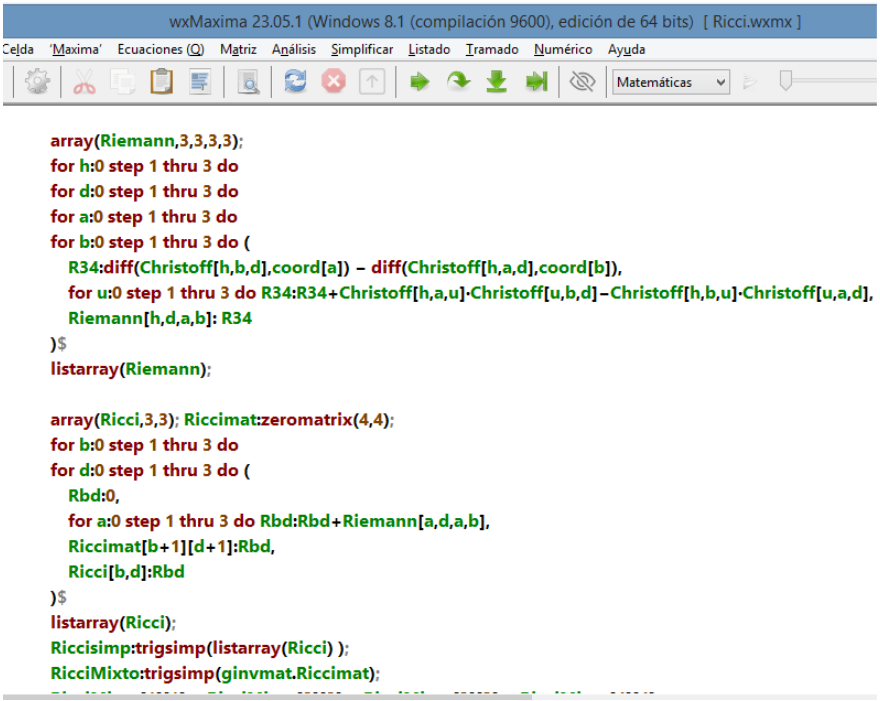
$\overline{T}^z{}_z = T^z{}_z - (T/2).g^z{}_z = 0 - (T/2) = -(T/2)$

La parte espacial es exactamente opuesta a la temporal, puede ser proporcional al Ricci.
Los valores numéricos de todo lo que vinimos calculando deberían evidenciar una proporcionalidad exactamente compatible con la ecuación de campo de Einstein: $R^\alpha{}_\beta = 8.\pi.G/c^4.\,(T^\alpha{}_\beta - (T/2).g^\alpha{}_\beta)$

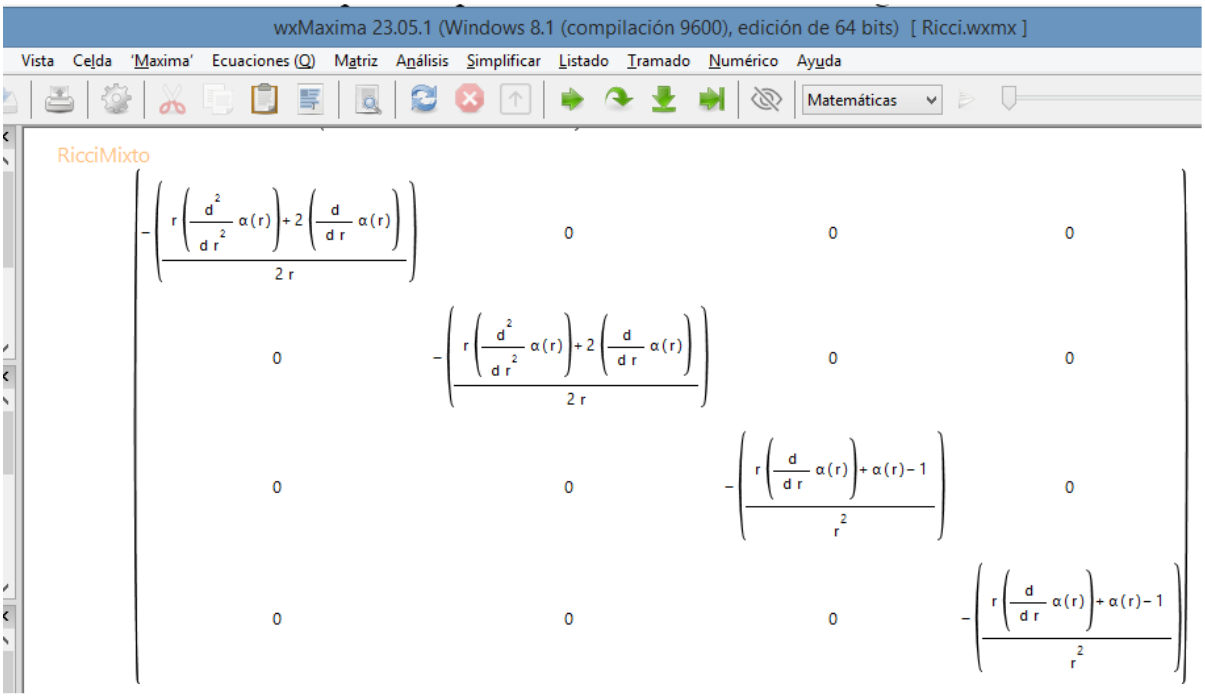
<u>Curiosidad</u>: Después de tanto trabajar con métricas de Minkowski con la componente temporal negada, debemos cuidar de no confundirnos si nos llega a aparecer la matriz identidad.
La métrica $g^\alpha{}_\beta$ con un índice alto y uno bajo no es más que una δelta Kronecker $\delta^\alpha{}_\beta$.

12. SOLUCIONES EXACTAS:

Las soluciones exactas a las ecuaciones de campo de Einstein involucran cálculos bastante complejos con los símbolos de Christoffel y con los tensores de Riemann y Ricci. Sugerimos buscar apoyo en algún paquete de software que maneje Cálculo Simbólico. Para la elaboración de este documento se utilizó "Maxima", que se puede ejecutar en línea https://maxima.cesga.es o descargar para uso libre.
A continuación mostramos una captura de pantalla con un extracto de código fuente:



Y un ejemplo de los resultados entregados por el programa:



$$\begin{pmatrix} -\frac{r\left(\frac{d^2}{dr^2}\alpha(r)\right)+2\left(\frac{d}{dr}\alpha(r)\right)}{2r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{r\left(\frac{d^2}{dr^2}\alpha(r)\right)+2\left(\frac{d}{dr}\alpha(r)\right)}{2r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{r\left(\frac{d}{dr}\alpha(r)\right)+\alpha(r)-1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{r\left(\frac{d}{dr}\alpha(r)\right)+\alpha(r)-1}{r^2} \end{pmatrix}$$

Comenzaremos con escenarios simplificados compatibles con la relación $\beta(r)=1/\alpha(r)$ entre el coeficiente radial y temporal de la métrica. Esto nos permitirá encontrar dos soluciones exactas:

- La métrica exterior de Schwarzschild — solo masa 'M'
- La métrica exterior de Reissner-Nordström — masa 'M' + carga eléctrica 'Q'

Levantaremos luego la restricción $\beta=1/\alpha$ para contemplar coeficientes $\beta(r)$ genéricos, y eso nos permitirá resolver la llamada métrica interior de Schwarzschild.

Calcularemos en forma explícita los 4 componentes de la diagonal R_{oo}, R_{rr}, $R_{\theta\theta}$ y $R_{\varphi\varphi}$, lo que generará un sistema sobredeterminado con 4 ecuaciones diferenciales y 1 sola función incógnita $\alpha(r)$ [o 2 funciones incógnitas $\alpha(r)$, $\beta(r)$].
Que haya solución a pesar de la sobredeterminación tiene que ver con la independencia temporal y con las simetrías esféricas de estas configuraciones analizada.

12.1 Solución de vacío de Schwarzschild.

En los alrededores de una masa 'M' con simetría esférica, la métrica tiene una forma genérica:
$dS^2 = -\alpha(r).(c.dt)^2 + \beta(r).dr^2 + r^2.(d\theta^2 + sen^2\theta\, d\varphi^2)$.
Ya tuvimos abundantes evidencias de que parece haber soluciones prometedoras con $\beta(r)=1/\alpha(r)$, obtenidas por diagonalización de alguna métrica de la familia de Gullstrand-Painlevé.
Así que intentaremos calcular los tensores de Ricci y Riemann con esta simplificación.

12.1.1 Símbolos de Christoffel:

Todo empieza por calcular los Christoffel a través del método geodésico. Como los factores de masa y velocidad de la luz al cuadrado no aparecen en las ecuaciones geodésicas, podemos ignorarlos y trabajar con un "falso" lagrangeano (con la advertencia de que los momentos lagrangeanos así calculados no deberían confundirse con los momentos físicos reales): $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\,[\,-\alpha(r).(c.t^{\cdot})^2 + r^{\cdot 2}/\alpha(r) + r^2.\theta^{\cdot 2} + r^2.sen^2\theta.\varphi^{\cdot 2}]$

→temporal:
$Po = \partial\mathcal{L}/\partial(c.t^{\cdot}) = -\alpha(r).c.\,t^{\cdot}$ $\qquad \partial\mathcal{L}/\partial(ct) = 0$
$dPo/d\tau = 0$
$\alpha(r).\,t^{\cdot\cdot} + \alpha'(r).ct^{\cdot}.r^{\cdot} = 0$
$t^{\cdot\cdot} + \alpha'(r)/\alpha(r).ct^{\cdot}.r^{\cdot} = 0$
→$\Gamma^0_{r0} = \Gamma^0_{0r} = \frac{1}{2}.\alpha'(r)/\alpha(r)$.

→radial:
$Pr = \partial\mathcal{L}/\partial r^{\cdot} = r^{\cdot}/\alpha(r)$ $\qquad \partial\mathcal{L}/\partial r = -\alpha'(r).(c.t^{\cdot})^2/2 - \alpha'(r)/\alpha^2.r^{\cdot 2}/2 + r.\theta^{\cdot 2} + r.sen^2\theta.\varphi^{\cdot 2}$
$dPr/d\tau - \partial\mathcal{L}/\partial r = 0$
$r^{\cdot\cdot}/\alpha(r) - r^{\cdot 2}.\alpha'(r)/\alpha^2(r) + \alpha'(r).(c.t^{\cdot})^2/2 + \alpha'(r)/\alpha^2.r^{\cdot 2}/2 - r.\theta^{\cdot 2} - r.sen^2\theta.\varphi^{\cdot 2} = 0$
$r^{\cdot\cdot}/\alpha(r) - \frac{1}{2}.r^{\cdot 2}.\alpha'(r)/\alpha^2(r) + \alpha'(r).(c.t^{\cdot})^2/2 - r.\theta^{\cdot 2} - r.sen^2\theta.\varphi^{\cdot 2} = 0$
$r^{\cdot\cdot} - \frac{1}{2}.r^{\cdot 2}.\alpha'(r)/\alpha(r) + \alpha'(r).\alpha(r).(c.t^{\cdot})^2/2 - \alpha(r).r.\theta^{\cdot 2} - \alpha(r).r.sen^2\theta.\varphi^{\cdot 2} = 0$
→ $\Gamma^r_{00} = \frac{1}{2}.\alpha'(r).\alpha(r)$ $\Gamma^r_{rr} = -\frac{1}{2}.\alpha'(r)/\alpha(r)$ $\Gamma^r_{\theta\theta} = -\alpha(r).r$ $\Gamma^r_{rr} = -\alpha(r).r.sen^2\theta$.

→polar:
$P\theta = \partial\mathcal{L}/\partial\theta^{\cdot} = r^2.\theta^{\cdot}$ $\qquad \partial\mathcal{L}/\partial\theta = r^2.sen\theta.cos\theta.\,\varphi^{\cdot 2}$
$dP\theta/d\tau - \partial\mathcal{L}/\partial\theta = 0$
$r^2.\theta^{\cdot\cdot} + 2.r.r^{\cdot}.\theta^{\cdot} - r^2.sen\theta.cos\theta.\varphi^{\cdot 2} = 0$
$\theta^{\cdot\cdot} + 2/r.r^{\cdot}.\theta^{\cdot} - sen\theta.cos\theta.\varphi^{\cdot 2} = 0$
→ $\Gamma^\theta_{r\theta} = \Gamma^\theta_{\theta r} = 1/r$ $\Gamma^\theta_{\varphi\varphi} = -sen\theta cos\theta$.

→acimutal:
$P\varphi = \partial\mathcal{L}/\partial\varphi^{\cdot} = r^2.sen^2\theta.\varphi^{\cdot}$ $\qquad \partial\mathcal{L}/\partial\varphi = 0$
$dP\varphi/d\tau = 0$
$r^2.sen^2\theta.\varphi^{\cdot\cdot} + 2r.sen^2\theta.r^{\cdot}.\varphi^{\cdot} + 2r^2.sen\theta.cos\theta.\theta^{\cdot}.\varphi^{\cdot} = 0$
$\varphi^{\cdot\cdot} + 2/r.r^{\cdot}.\varphi^{\cdot} + 2.cos\theta/sen\theta.\theta^{\cdot}.\varphi^{\cdot} = 0$
→ $\Gamma^\varphi_{\varphi r} = \Gamma^\varphi_{r\varphi} = 1/r$ $\Gamma^\varphi_{\varphi\theta} = \Gamma^\varphi_{\theta\varphi} = -ctg\theta$.

Matrices de Christoffel:

$[C0]=\Gamma^{\lambda}_{\mu 0}$

	0	r	Θ	φ
0		α'/2α		
r	α'.α/2			
θ				
φ				

$[Cr]=\Gamma^{\lambda}_{\mu r}$

	0	r	θ	φ
0	α'/2α			
r		-α'/2α		
θ			1/r	
φ				1/r

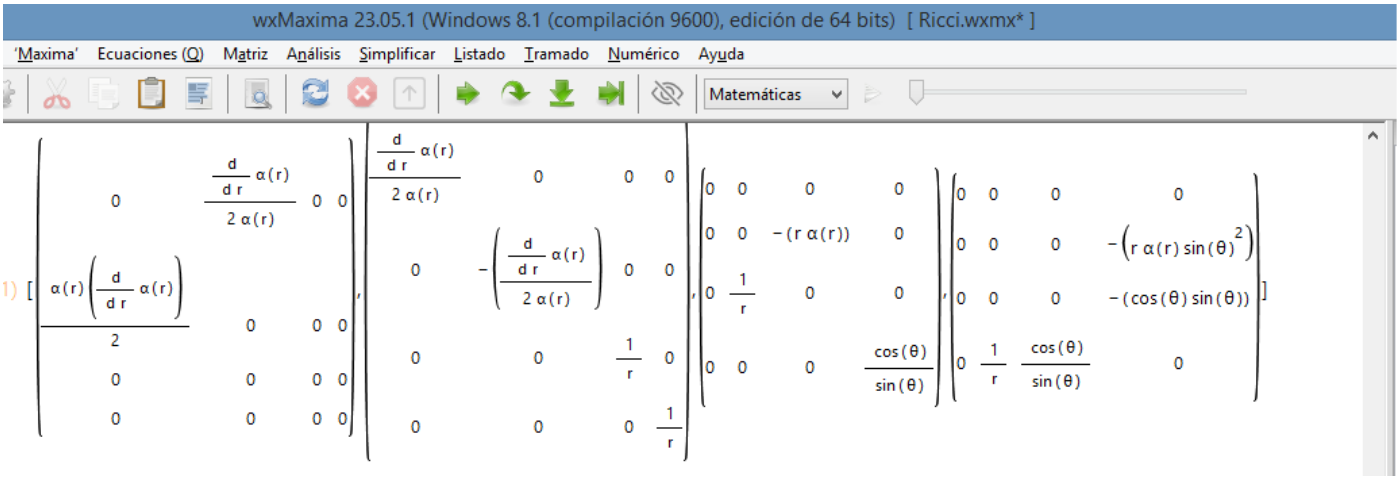
$[C\theta]=\Gamma^{\lambda}_{\mu\theta}$

	0	r	θ	φ
0				
r			-r.α	
θ		1/r		
φ				ctgθ

$[C\varphi]=\Gamma^{\lambda}_{\mu\varphi}$

	0	r	θ	φ
0				
r				-r.α.sen²θ
θ				-senθ.cosθ
φ		1/r	ctgθ	

Verificación en "Maxima":



12.1.2 Tensor de Riemann:

Son 4 índices: $R^{\lambda}_{\mu\alpha\beta}$. Exploramos 6 sectores según la combinación αβ: 0r, 0θ, 0φ, rθ, rφ, θφ
Nos concentramos en las combinaciones útiles para la diagonal del tensor de Ricci, bajo la hipótesis de que son las más significativos para las métricas con tantas simetrías como las estudiadas en este trabajo.
Para cada αβ calculamos λμ=αβ→ $R^{\alpha}_{\beta\alpha\beta}$ contribuye al Ricci $R_{\beta\beta}$
También calculamos λμ=βα→ $R^{\beta}_{\alpha\beta\alpha}$, negado del $R^{\beta}_{\alpha\beta\alpha}$ que contribuye al Ricci $R_{\alpha\alpha}$
En cada caso, llamamos "derivadas" a las contribuciones de las derivadas de los Christoffel, y "matrices" al resultados de los productos matriciales.

- sector αβ=0r, λμ=0r
  R^{0}_{r0r}= derivadas + matrices

derivadas=$\partial_0\Gamma^0_{rr} - \partial_r\Gamma^0_{r0} = (0) - \partial_r(\alpha'/2\alpha) = (0) - ½.(\alpha''/\alpha - \alpha'^2/\alpha^2) = ½.(-\alpha''/\alpha + \alpha'^2/\alpha^2)$
matrices = [C0,fil-0][Cr,col-r] –[Cr,fil-0][C0,col-r]

										α'/2α
				-α'/2α						
	α'/2α			-α'²/(4α²)		α'/2α				α'²/4α²

Juntamos las 4 contribuciones:
$R^{0}_{r0r}=(0) - \alpha''/2\alpha + \alpha'^2/2\alpha^2 + (-\alpha'^2/4\alpha^2) - (\alpha'^2/4\alpha^2) = -\alpha''/2\alpha$
$R^{0}_{r0r}= -\alpha''/2\alpha$

- sector αβ=0r, λμ=r0
  R^{r}_{00r}= derivadas + matrices

derivadas=$\partial_0\Gamma^r_{0r} - \partial_r\Gamma^r_{00} = (0) - \partial_r(\alpha.\alpha'/2) = (0) - ½.(\alpha''.\alpha + \alpha'^2)$
matrices = [C0,fil-r][Cr,col-0] –[Cr,fil-r][C0,col-0]

				α'/2α						
										α'.α/2
α'.α/2				α'²/4			-α'/2α			-α'²/4

Juntamos las 4 contribuciones:

$R^{r}_{00r} = -½.(\alpha\alpha'' + \alpha'^{2}) + (\alpha'^{2}/4) - (-\alpha'^{2}/4) = -½.(\alpha.\alpha'' + \alpha'^{2}) + \alpha'^{2}/2$

$R^{r}_{00r} = -½.(\alpha.\alpha'')$ →aplicamos anti-simetría

$R^{r}_{0r0} = ½.(\alpha.\alpha'')$

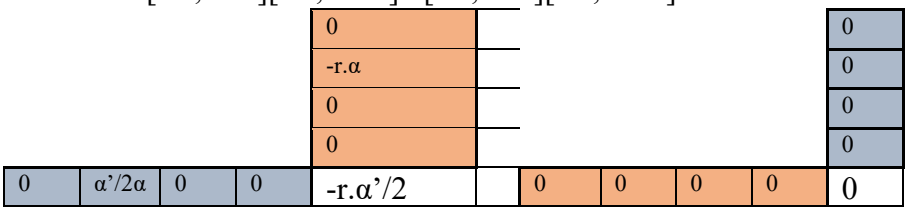
xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

- sector αβ=0θ, λμ=0θ

  $R^{0}_{\theta 0\theta}$ = derivadas + matrices

derivadas $= \partial_0\Gamma^{0}_{\theta\theta} - \partial_\theta\Gamma^{0}_{\theta 0} = (0) - \partial_\theta(0) = 0$

matrices = [C0,fil-0][Cθ,col-θ] –[Cθ,fil-0][C0,col-θ]



Juntamos las 4 contribuciones

$R^{0}_{\theta 0\theta} = (0) - (0) + (-r.\alpha'/2) - (0)$

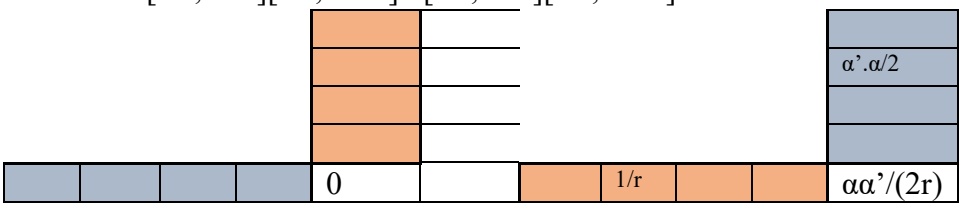
$R^{0}_{\theta 0\theta} = -r.\alpha'(r)/2$

- sector αβ=0θ, λμ=θ0

  $R^{\theta}_{00\theta}$ = derivadas + matrices

derivadas $= \partial_0\Gamma^{\theta}_{0\theta} - \partial_\theta\Gamma^{\theta}_{00} = (0) - \partial_\theta(0) = 0$

matrices = [C0,fil-θ][Cθ,col-0] –[Cθ,fil-θ][C0,col-0]



Juntamos las 4 contribuciones:

$R^{\theta}_{00\theta} = (0) - (0) + (0) - (\alpha\alpha'/(2r)) - (0)$

$R^{\theta}_{00\theta} = -(\alpha\alpha'/(2r)$ →negamos

$R^{\theta}_{0\theta 0} = \alpha.\alpha'(r)/(2r)$

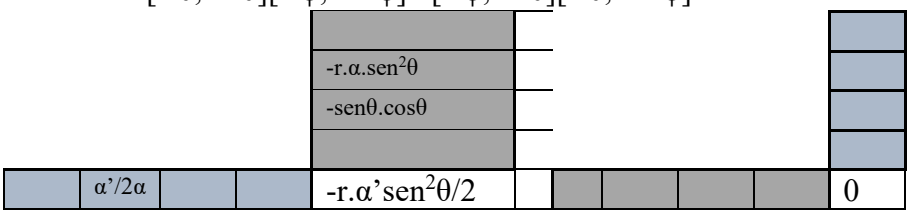
xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

- sector αβ=0φ, λμ=0φ

  $R^{0}_{\varphi 0\varphi}$ = derivadas + matrices

derivadas $= \partial_0\Gamma^{0}_{\varphi\varphi} - \partial_\varphi\Gamma^{0}_{\varphi 0} = (0) - (0) = 0$

matrices = [C0,fil-0][Cφ,col-φ] –[Cφ,fil-0][C0,col-φ]



Juntamos las 4 contribuciones

$R^{0}_{\varphi 0\varphi} = (0) - (0) + (-r.\alpha'.\text{sen}^{2}\theta/2) - (0)$

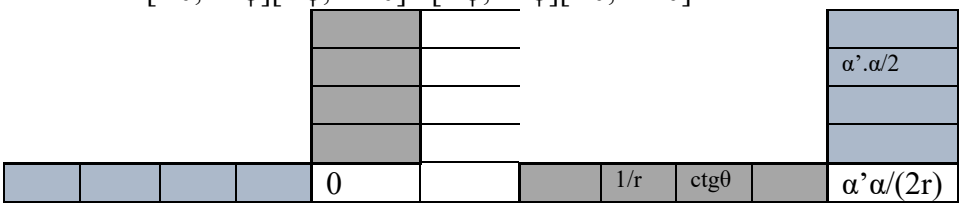
$R^{0}_{\varphi 0\varphi} = -r.\alpha'(r)\text{sen}^{2}\theta/2$

- sector αβ=0φ, λμ=φ0

  $R^{\varphi}{}_{00\varphi}$ = derivadas + matrices

derivadas=$\partial_0\Gamma^{\varphi}{}_{0\varphi} - \partial_\varphi\Gamma^{\varphi}{}_{00} = (0) - \partial_\varphi(0) = 0$

matrices = [C0,fil-φ][Cφ,col-0] –[Cφ,fil-φ][C0,col-0]



Juntamos las 4 contribuciones

$R^{\varphi}{}_{00\varphi} = (0) - (0) + (0) - (\alpha\alpha'/(2r)) - (0)$

$R^{\varphi}{}_{00\varphi} = -(\alpha\alpha'/(2r)$ →negamos

$R^{\varphi}{}_{0\varphi0} = \alpha.\alpha'(r)/(2r)$

xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

Ya tenemos los 3 contribuyentes al Ricci temporal R_{00}.

$R_{oo} = R^{r}{}_{oro} + R^{\theta}{}_{o\theta o} + R^{\varphi}{}_{o\varphi o}$

$R_{oo} = ½.(\alpha\alpha'') + \alpha.\alpha'(r)/(2r) + \alpha.\alpha'(r)/(2r)$

$R_{00} = ½.\alpha.\alpha'' + \alpha\alpha'/r$

$R_{00} = \alpha/2.\ [\alpha'' + 2.\alpha'/r\ ]$

Entonces la primera condición de Ricci nulo es la ecuación diferencial $\alpha''(r) + 2.\alpha'(r)/r = 0$.

Es una ecuación diferencial de segundo orden, que podría eventualmente resolverse en dos etapas definiendo una función auxiliar f(r)=α'(r) (quedaría de primer orden en f(r): f ' + 2.f/r = 0)

Aquí seguiremos otro camino. Ponemos denominador común r^2 y queda una derivada exacta de producto.

$(1/r^2).\ [r^2.\alpha''(r) + 2.r.\alpha'(r)\ ] = 0$ →es derivada de un producto

$(1/r^2).\partial_r[r^2.\ \alpha'(r)\ ] = 0$

¿A quién se le puede ocurrir buscar derivadas de la forma $(1/r^2).\partial_r[r^2.☺]$?

A quien trabajó con divergencias y laplacianos en coordenadas esféricas.

Aquí no son coordenadas esféricas exactas, pero gracias a la hipótesis de β=1/α podemos garantizar que las fórmulas de la raíz del determinante 'g' se reducen a las fórmulas de coordenadas esféricas.

En este contexto físico, teniendo en cuenta que el potencial gravitatorio está metido dentro de $\alpha=1+2\Phi_g/c^2$, la derivada que encontramos es lo que en 9.5 llamábamos "laplaciano relativista del potencial".

$r^2\ .\alpha'(r) = K$ constante

$\alpha'(r) = K/r^2$ →se integra directamente

$\alpha(r) = Q - K/r$

Las condiciones de límite clásico en $r\to\infty$ permiten resolver las constantes de integración Q,K.

- Orden 0: α(r)=1 en $r\to\infty$, la métrica debe resultar plana (Minkowski) sin dilatación temporal→Q=1
- Orden 1: Para $r \gg r_S$ la perturbación debe corresponder a la gravedad newtoniana →K=r_S.

  $\alpha(r) = 1 - r_S/r$

Bien, confirmamos que esta función α(r) anula R_{00}.

Pero debemos resolver 4 ecuaciones con 1 sola incógnita.

Esta misma α(r) debe anular R_{rr}, $R_{\theta\theta}$ y $R_{\varphi\varphi}$.

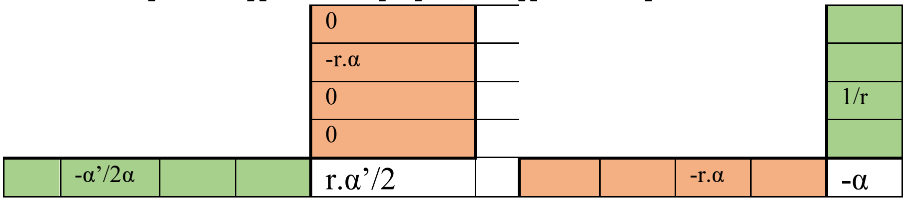
Continuamos con el resto de los sectores del tensor de Riemann.

- sector $\alpha\beta=r\theta$, $\lambda\mu=r\theta$

  $R^{r}{}_{\theta r\theta}$ = derivadas + matrices

derivadas$=\partial_r\Gamma^r{}_{\theta\theta} - \partial_\theta\Gamma^r{}_{\theta r} = \partial_r[-r.\alpha(r)] - \partial_\theta(0) = -(\alpha + r.\alpha')$

matrices = [Cr,fil-r][Cθ,col-θ] –[Cθ,fil-r][Cr,col-θ]



Juntamos las 4 contribuciones

$R^{r}{}_{\theta r\theta} = -\alpha - r.\alpha' + r\alpha'/2 - (-\alpha) = -r.\alpha'/2$

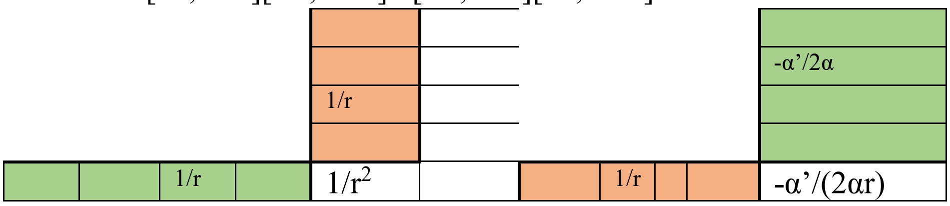
$R^{r}{}_{\theta r\theta} = -r.\alpha'(r)/2$

- sector $\alpha\beta=r\theta$, $\lambda\mu=\theta r$

  $R^{\theta}{}_{rr\theta}$ = derivadas + matrices

derivadas$=\partial_r\Gamma^\theta{}_{r\theta} - \partial_\theta\Gamma^\theta{}_{rr} = \partial_r(1/r) - \partial_\theta(0) = -1/r^2$

matrices = [Cr,fil-θ][Cθ,col-r] –[Cθ,fil-θ][Cr,col-r]



Juntamos las 4 contribuciones

$R^{\theta}{}_{rr\theta} = (-1/r^2) - (0) + (1/r^2) - [-\alpha'/(2\alpha r)] - (0)$

$R^{\theta}{}_{rr\theta} = \alpha'/(2\alpha r)$ →negamos

$R^{\theta}{}_{r\theta r} = -\alpha'/(2\alpha r)$

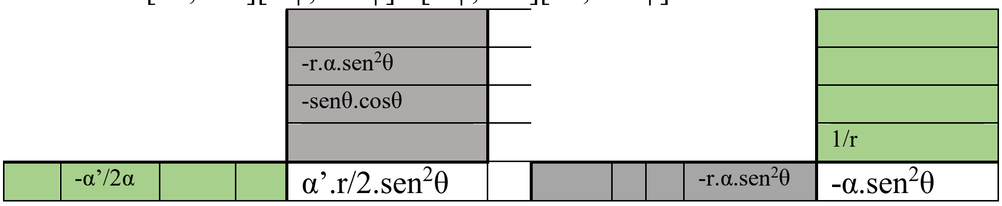
xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

sector $\alpha\beta=r\varphi$, $\lambda\mu=r\varphi$

$R^{r}{}_{\varphi r\varphi}$ = derivadas + matrices

derivadas$=\partial_r\Gamma^r{}_{\varphi\varphi} - \partial_\varphi\Gamma^r{}_{\varphi r} = \partial_r[-r.\alpha(r).\text{sen}^2\theta] = -\text{sen}^2\theta.(\alpha + r.\alpha')$

matrices = [Cr,fil-r][Cφ,col-φ] –[Cφ,fil-r][Cr,col-φ]



Juntamos las 4 contribuciones

$R^{r}{}_{\varphi r\varphi} = -\text{sen}^2\theta.(\alpha + r.\alpha') - (0) + r.\alpha'.\text{sen}^2\theta/2 - (-\alpha.\text{sen}^2\theta)$

$R^{r}{}_{\varphi r\varphi} = \text{sen}^2\theta.\,[-\alpha - r.\alpha' + r.\alpha'/2 + \alpha)$

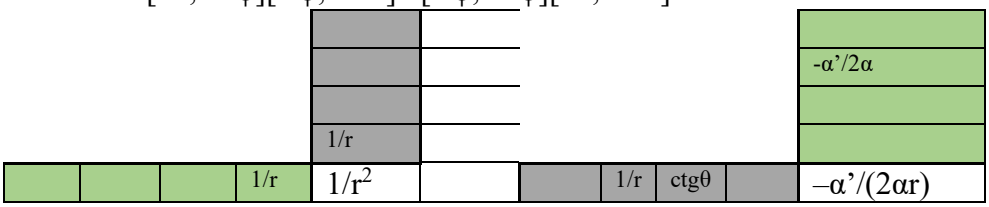
$R^{r}{}_{\varphi r\varphi} = -\text{sen}^2\theta.r.\alpha'(r)/2$

- sector αβ=rφ, λμ=φr

  $R^{\varphi}{}_{rr\varphi}$ = derivadas + matrices

derivadas=$\partial_r\Gamma^{\varphi}{}_{r\varphi} - \partial_\varphi\Gamma^{\varphi}{}_{rr} = \partial_r(1/r) - (0) = -1/r^2$

matrices = [Cr,fil-φ][Cφ,col-r] –[Cφ,fil-φ][Cr,col-r]



Juntamos las 4 contribuciones

$R^{\varphi}{}_{rr\varphi} = (-1/r^2) - (0) + (1/r^2) - [-\alpha'/(2\alpha r)] - (0)$

$R^{\varphi}{}_{rr\varphi} = \alpha'/(2\alpha r)$ →negamos

$R^{\varphi}{}_{r\varphi r} = -\alpha'/(2\alpha r)$

xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

Ya tenemos otro componente del Ricci listo para calcular, el radial R_{rr}:

$R_{rr} = R^{0}{}_{r0r} + R^{\theta}{}_{r\theta r} + R^{\varphi}{}_{r\varphi r}$

$R_{rr} = -\alpha''/2\alpha + -\alpha'/(2\alpha r) + -\alpha'/(2\alpha r)$

$R_{rr} = -\alpha''/2\alpha - \alpha'/(\alpha r) = -(\alpha''+2\alpha'/r)/(2\alpha)$

La condición de Ricci nulo es $\alpha''+2\alpha'/r=0$

Es la misma ecuación diferencial que apareció en la diagonal temporal →se obtiene la misma solución.

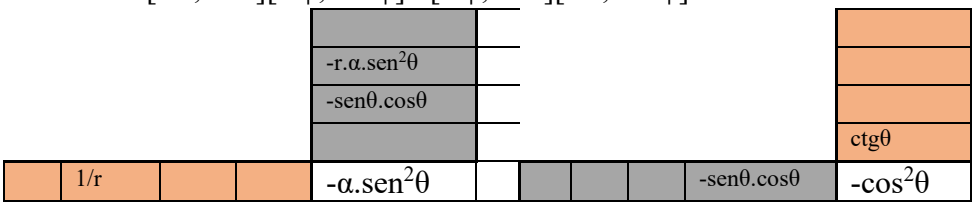
xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

- sector αβ=θφ, λμ=θφ

  $R^{\theta}{}_{\varphi\theta\varphi}$ = derivadas + matrices

derivadas=$\partial_\theta\Gamma^{\theta}{}_{\varphi\varphi} - \partial_\varphi\Gamma^{\theta}{}_{\varphi\theta} = \partial_\theta[-\text{sen}\theta.\cos\theta] = \text{sen}^2\theta - \cos^2\theta$

matrices = [Cθ,fil-θ][Cφ,col-φ] –[Cφ,fil-θ][Cθ,col-φ]



Juntamos las 4 contribuciones

$R^{\theta}{}_{\varphi\theta\varphi} = (\text{sen}^2\theta - \cos^2\theta) - (0) + (-\alpha.\text{sen}^2\theta) - (-\cos^2\theta)$

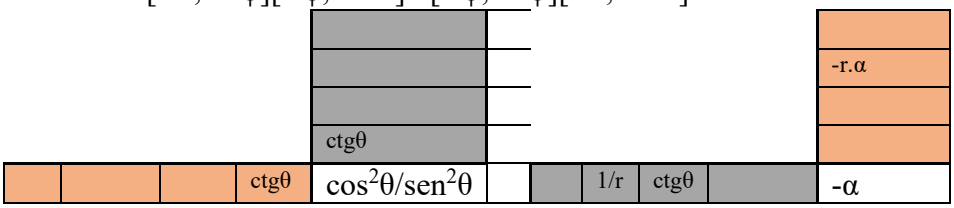
$R^{\theta}{}_{\varphi\theta\varphi} = \text{sen}^2\theta - \alpha.\text{sen}^2\theta$ → $R^{\theta}{}_{\varphi\theta\varphi} = (1-\alpha).\text{sen}^2\theta$

- sector αβ=θφ, λμ= φθ

  $R^{j}{}_{\varphi\theta\varphi}$ = derivadas + matrices

derivadas=$\partial_\theta\Gamma^{\varphi}{}_{\theta\varphi} - \partial_\varphi\Gamma^{\varphi}{}_{\theta\theta} = \partial_\theta[\text{ctg}\theta] = -1/\text{sen}^2\theta$

matrices = [Cθ,fil-φ][Cφ,col-θ] –[Cφ,fil-φ][Cθ,col-θ]



Juntamos las 4 contribuciones

$R^{\varphi}{}_{\theta\theta\varphi} = (-1/\text{sen}^2\theta) - (0) + (\cos^2\theta/\text{sen}^2\theta) - (-\alpha)$

$R^{\varphi}{}_{\theta\theta\varphi} = (\cos^2\theta - 1)/\text{sen}^2\theta + \alpha = -1 + \alpha$

$R^{\varphi}{}_{\theta\theta\varphi} -1 + \alpha$ →antisimetría

$R^{\varphi}{}_{\theta\varphi\theta} = (1-\alpha)$

12.1.3 Tensor de Ricci:

Tenemos todos los coeficientes para calcular los dos Ricci angulares:

$R_{\theta\theta} = R^{0}{}_{\theta 0\theta} + R^{r}{}_{\theta r\theta} + R^{\varphi}{}_{\theta\varphi\theta}$

$R_{\theta\theta} = -r.\alpha'/2 \ -r.\alpha'/2 \ + 1 - \alpha$

$R_{\theta\theta} = -r.\alpha' \ + 1 - \alpha$

La condición $R_{\theta\theta} = 0$ nos conduce a otra ecuación diferencial: $r.\alpha'(r) = 1 - \alpha(r)$

Es diferente de la anterior, pero debería admitir la misma función solución.

Intentamos separar las variables:

$r.d\alpha/dr = 1 - \alpha$

$d\alpha/(1-\alpha) = dr/r$ →diferenciales exactos

$-\log(1-\alpha) = \log(r/K)$

$\log(1-\alpha) = -\log(r/K)$

$\log(1-\alpha) = \log(K/r)$

$1-\alpha = K/r$

$\alpha = 1-K/r$

Nuevamente ajustamos la incógnita K para que las soluciones en el límite de 'r' grande coincidan con las clásicas conocidas de la Física de Newton: $\alpha(r) = 1 - r_s/r$

Faltaría calcular el último componente de Ricci:

$R_{\varphi\varphi} = R^{0}{}_{\varphi 0\varphi} + R^{r}{}_{\varphi r\varphi} + R^{\theta}{}_{\varphi\theta\varphi}$

$R_{\varphi\varphi} = -r.\alpha'(r)/2.\text{sen}^2\theta + -r.\alpha'(r)/2.\text{sen}^2\theta + (1-\alpha).\text{sen}^2\theta$

$R_{\varphi\varphi} = \text{sen}^2\theta.[-r.\alpha'(r)/2 + -r.\alpha'(r)/2 + (1-\alpha)]$

$R_{\varphi\varphi} = \text{sen}^2\theta.[-r.\alpha'(r) + (1-\alpha)]$

$R_{\varphi\varphi} = \text{sen}^2\theta.\ R_{\theta\theta}$

No hay que resolver ninguna ecuación diferencial nueva. La misma α(r) que anula $R_{\theta\theta}$ también anula $R_{\varphi\varphi}$.

Resumen de coeficientes del tensor de Ricci:

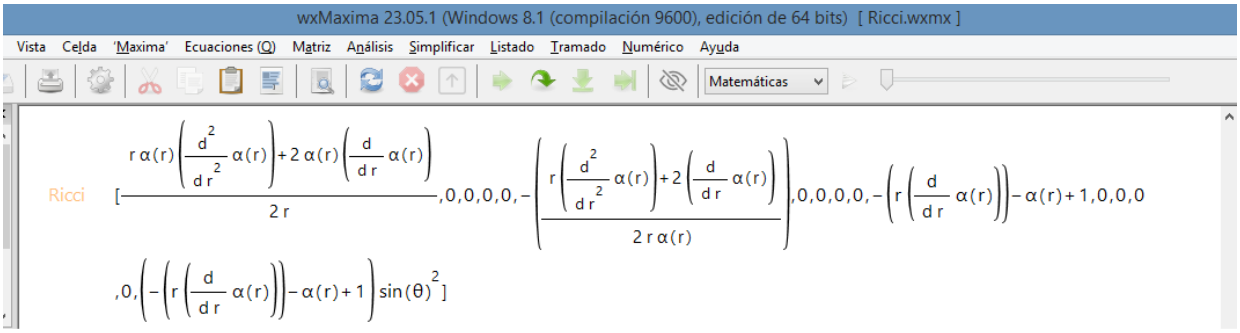
$R_{00} = \alpha(r)/2.\ [\alpha''(r) + 2.\alpha'(r)/r\ ]$

$R_{rr} = -[\alpha''(r) + 2.\alpha'/r\ ]\ /[2\alpha(r)]$

$R_{\theta\theta} = -r.\alpha'(r) + 1 - \alpha(r)$

$R_{\varphi\varphi} = R_{\theta\theta}.\text{sen}^2\theta$

Verificación en "Maxima":



Muchas veces el software presenta los resultados en forma de lista o array→debemos acostumbrarnos a leer ese formato o aprender a convertir al formato "matriz".

12.1.4 Coordenadas isotrópicas:

Las coordenadas de Schwarzschild (ct,r,θ,φ) son solo un caso particular de coordenadas capaces de describir el espacio-tiempo que se forma alrededor de un astro masivo. Una de las características principales de estas coordenadas es que el radio 'r' absorbe todas las distorsiones métricas en dirección de la gravedad, mientras que θ, φ mantienen intacta la métrica transversal: se pierde la isotropía espacial x,y,z.

Es posible recuperar la isotropía espacial haciendo aparecer $\rho^2 = x^2+y^2+z^2$ en las distorsiones métricas de una manera que afecte por igual a toda la parte espacial.
Es decir, que salga de factor común $(d\rho)^2 + \rho^2.d\Omega^2=(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2$

En la métrica tenemos $(dS)^2= -(1-r_S/r).(c.dt)^2 + 1/(1-r_S/r).(dr)^2 + r^2.(d\Omega^2)$
Podemos aproximarnos a la isotropía con un cambio de coordenadas $r=\rho+\zeta$, aplicando un pequeño desplazamiento ζ (posiblemente del orden del radio de Schwarzschild) que afecta muy poco en las regiones lejanas de campo débil. Esta idea está inspirada en las transformaciones de calibre mencionadas en 11.2.5.

Comenzamos probando soluciones ζ=constante, por lo que $dr=d\rho$ y el término radial queda

radial $=1/(1-r_S/r).(dr)^2$
$=1/(1-r_S/r).(d\rho)^2$ →aproximamos para $r_S/r \ll 1$
$\approx(1+r_S/r).(d\rho)^2$

La métrica transversal queda:

angular $= r^2.d\Omega^2$
$= (\rho+\zeta)^2 d\Omega^2$
$= \rho^2.(1+\zeta/\rho)^2 d\Omega^2$ →aproximamos $\zeta \ll \rho$
$\approx \rho^2.(1+2\zeta/\rho)d\Omega^2$

La condición de isotropía es que coincidan los factores:

$1+r_S/r \approx 1+2\zeta/\rho$
$\zeta=r_S/2$

Dentro de la familia de posibilidades ζ=cte, esta es nuestra opción óptima para las regiones lejanas.
Podríamos plantear en forma exacta la condición que precisamos que se cumpla:
$1/(1-r_S/r).(dr)^2 + r^2. d\Omega^2=f(\rho).[(d\rho)^2 + \rho^2.d\Omega^2]$

Lo que nos llevaría a resolver:

$1/(1-r_S/r).(dr)^2 =f(\rho).(d\rho)^2$ $r^2=f(\rho).\rho^2$
$(dr)^2/(1-r_S/r)/r^2 =(d\rho)^2/\rho^2$ [EC-12.2.3]

Esta ecuación diferencial se integra en forma exacta por variables separadas y permite obtener $\rho(r)$.
Pero en realidad lo que precisamos es la función inversa $r(\rho)$, para poder eliminar la 'r' y expresar toda la métrica en la nueva coordenada ρ.

Hay una conjetura de solución (en alemán *Ansatz*) que da buen resultado: $r = \rho + Co + C_1/\rho$
Se trata de continuar con la idea reciente, pero esta vez refinando más la precisión y agregando un nuevo término C_1/ρ para lograr que $[1 -r_S/r]$ sea un cuadrado perfecto (el único que falta en la EC-12.2.3).
Operamos:
$1 -r_S/r = 1 -r_S/(\rho + Co + C_1/\rho)$
$= (\rho + Co + C_1/\rho -r_S) / (\rho + Co + C_1/\rho)$
$= [\rho^2 + \rho(Co-r_S) + C_1] /[\rho^2 + \rho.Co + C_1]$
Deben cumplirse 2 condiciones:

$C_1 =(C_0-r_S)^2/4$ $C_1 =(C_0)^2/4$

Hay que prestar atención a que un negativo al cuadrado también puede dar positivo.
$C_0-r_S =C_0$ sería imposible, pero $C_0-r_S = -C_0$ da lugar a soluciones no triviales.
$C_0=r_S/2$ (igual que obtuvimos en la primera aproximación ζ=cte) $C_1=(r_S/4)^2$

$1 -r_S/r = [\rho^2 + -\rho.r_S/2 + (r_S/4)^2] /[\rho^2 + \rho. r_S/2 + (r_S/4)^2]$
$1 -r_S/r = [\rho-r_S/4]^2/[\rho+r_S/4]^2$

El cambio de variable $r(\rho)$ queda:

$r = \rho + r_S/2 + (r_S/4)^2/\rho$
$r = [\rho^2 + \rho.r_S/2 + (r_S/4)^2]/\rho$
$r = [\rho + r_S/4]^2/\rho$
$r^2 = [\rho + r_S/4]^4/\rho^2$

Los diferenciales quedan:

$r = \rho + r_S/2 + (r_S/4)^2/\rho$
$dr = d\rho - d\rho/\rho^2.(r_S/4)^2$
$dr = d\rho[1-(r_S/4)^2/\rho^2]$
$dr = d\rho[\rho^2-(r_S/4)^2]/\rho^2$
$dr^2 = d\rho^2.[\rho^2-(r_S/4)^2]^2/\rho^4$

Reconvertimos la métrica espacial a la nueva coordenada:
espacial = $(dr)^2/(1-r_S/r) + r^2 d\Omega^2$
espacial = $d\rho^2.[\rho^2-(r_S/4)^2]^2/\rho^4 \,/[\rho-r_S/4]^2.[\rho+r_S/4]^2 + [\rho+r_S/4]^4/\rho^2 d\Omega^2$
espacial = $d\rho^2.[\rho^2-(r_S/4)^2]^2/\rho^4/[\rho-r_S/4]^2.[\rho+r_S/4]^2 + [\rho+r_S/4]^4/\rho^2 d\Omega^2$

Reconocemos un producto notable $\rho^2-(r_S/4)^2 = [\rho+(r_S/4)].[\rho-(r_S/4)]$

espacial = $d\rho^2.\ [\rho+(r_S/4)]^2.[\rho-(r_S/4)]^2/\rho^4/[\rho-r_S/4]^2.[\rho+r_S/4]^2 + [\rho+r_S/4]^4/\rho^2 d\Omega^2$
espacial = $d\rho^2.\ [\rho+(r_S/4)]^2.[\rho-(r_S/4)]^2/\rho^4/[\rho-r_S/4]^2.[\rho+r_S/4]^2 + [\rho+r_S/4]^4/\rho^2 d\Omega^2$
espacial = $d\rho^2.\ [\rho+(r_S/4)]^4/\rho^4 + [\rho+r_S/4]^4/\rho^2 d\Omega^2$
espacial = $[\rho+(r_S/4)]^4/\rho^4.[d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2]$
espacial = $[1+(r_S/4\rho)]^4.[d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2]$
Sale de factor común la perturbación, tal como estábamos buscando, y quedan juntos todos los diferenciales de coordenadas en su forma isotrópica. Esto vale en forma exacta y trasciende la región $\rho \gg r_S$.

temporal = $-(c.dt)^2.(1-r_S/r)$
temporal = $-(c.dt)^2.\ [\rho-r_S/4]^2/[\rho+r_S/4]^2$
temporal = $-(c.dt)^2.\ [1-r_S/4\rho]^2/[1+r_S/4\rho]^2$
Total $(dS)^2$ = temporal + espacial

$$(dS)^2 = -(c.dt)^2.\ [1-r_S/4\rho]^2/[1+r_S/4\rho]^2 + [1+(r_S/4\rho)]^4.[d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2]$$

En el límite $\rho \gg r_S$, esto se reduce a $(dS)^2 \approx -(c.dt)^2.\ [1-r_S/\rho] + [1+r_S/\rho].[d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2]$

12.1.5 Otras coordenadas:

La falta de isotropía en la coordenada radial de Schwarzschild era una de las características que motivaba la búsqueda de sistemas de referencia alternativos.

Debemos observar otra característica, y es que al cruzar el horizonte de sucesos hacia la zona $r<r_S$ las coordenadas invierten sus roles:

- 'r' se vuelve temporal porque los $(dr)^2$ pasan a restar en la forma cuadrática de $(dS)^2$
- 't' se vuelve espacial porque los $(dt)^2$ pasan a sumar en la forma cuadrática de $(dS)^2$

Esta rareza inspiró a muchos físicos y matemáticos a desarrollar otros sistemas de coordenadas que pudieran describir estas regiones de espaciotiempo, especialmente en las inmediaciones de la frontera $r=r_S$.
Como ejemplos podemos mencionar:

- Coordenadas de Gullstrand-Painlevé (introducidas en 7.2.4)
- Coordenadas de Eddington-Finkelstein
- Coordenadas Kruskal-Szekeres

En el caso de Kruskal-Szekeres, lo que se busca es pasar de las coordenadas Schwarzschild (t,r) a unas nuevas (t_k,r_k) donde los rayos de luz se vean a ±45º en un diagrama espacio-tiempo.
Partimos de la métrica de Schwarzschild: $(dS)^2 = -(1-r_S/r)(c.dt)^2 + (dr)^2/(1-r_S/r) + r^2.d\Omega^2$
Ignoramos la parte angular, y queremos que en la parte temporal-radial salga de factor común una función incógnita que deberemos calcular:
$-(1-r_S/r)(c.dt)^2 + (dr)^2/(1-r_S/r) = f^2(r).[-(c.dt_k)^2 + (dr_k)^2]$
Probamos un cambio de variable inspirado en la idea de Rindler. Una partícula quieta en el espacio Schwarzschild r=cte, está describiendo un movimiento hiperbólico acelerado en las coordenadas (t_k,r_k):

$ct_k = X(r).sh(ct/K)$
$r_k = X(r).ch(ct/K)$
X(r) es otra incógnita a resolver

Diferenciamos:

$d(ct_k) = X'(r).dr.sh(ct/K) + X(r).(dct)/K.ch(ct/K)$
$dr_k = X'(r).dr.ch(ct/K) + X(r).(dct)/K.sh(ct/K)$

Elevamos al cuadrado:

$d(ct_k)^2 = X'(r)^2.dr^2.sh^2(ct/K) + X^2(r).(dct)^2/K^2.ch^2(ct/K) + 2.dr.(dct).X'.X/K.sh.ch$
$dr_k^2 = X'(r)^2.dr^2.ch^2(ct/K) + X^2(r).(dct)^2/K^2.sh^2(ct/K) + 2.dr.(dct).X'.X/K.sh.ch$

Restamos y (¿por suerte?) desaparecen los dobles productos, igual que en Rindler 6.5.
¿Por suerte? No, esa fue exactamente la intención al utilizar funciones parecidas a Rindler.
Utilizando $ch^2-sh^2=1$ nos queda:

$dr_k^2 - d(ct_k)^2 = X'(r)^2.dr^2 - X^2(r).(dct)^2/K^2$ →escalamos por función $f(r)^2$
$f(r)^2.[dr_k^2 - d(ct_k)^2] = f(r)^2.X'(r)^2.dr^2 - f(r)^2.X^2.(r).(dct)^2/K^2$

Igualamos con la métrica expandida de Schwarzschild

$f(r)^2.X'(r)^2 = 1/(1-r_s/r)$
$f(r)^2.X^2.(r)/K^2 = (1-r_s/r)$

Dividimos ambas ecuaciones para eliminar la función incógnita de escalado.

$K^2X'(r)^2/X^2(r) = 1/(1-r_s/r)^2$
$KX'(r)/X(r) = \pm 1/(1-r_s/r)$

¡***Atención***! Al quitar los cuadrados, puede quedar un signo negativo.
Las coordenadas Kruskal-Szekeres apuntan a contemplar también la región $r<r_s$.
Por el momento tomamos el signo positivo y nos ubicamos en $r>r_s$, pero no debemos olvidarnos de esa posibilidad de otro signo y otra región.

$dX/X = dr/K/(1-r_s/r)$
$dX/X = dr/K.\ r/(r-r_s)$
$dX/X = dr/K.\ [1 + r_s/(r-r_s)]$ →integramos
$\log(X/X_o) = r/K + r_s/K.\log((r-r_s)/R)$
$X = X_o.e^{r/K}.[(r-r_s)/R]^{rs/K}$

Tenemos muchas constantes con unidades de longitud, y suponemos que deben ser del orden del radio de Schwarzschild. Pero no necesariamente iguales; en particular, la constante K debe ser compatible con la función $f(r)^2$.

$f(r)^2 = K^2/X^2(r).(1-r_s/r)$
$f(r)^2 = K^2/X_o^2.e^{-2r/K}[(r-r_s)/R]^{-2rs/K}.(1-r_s/r)$
$f(r)^2 = K^2/X_o^2.e^{-2r/K}[(r-r_s)/R]^{-2rs/K}.(r-r_s)/r$
$f(r)^2 = K^2/X_o^2.\ e^{-2r/K}(r-r_s)^{1-2rs/K}\ .R^{2rs/K}/r$

Para simplificar al máximo el factor de escala $f(r)^2$ que nos va a quedar en la expresión final de la métrica expandida $(dS)^2$, ajustamos el exponente tal que $1-2r_S/K=0$ → $K=2r_S$
Elegimos (arbitrariamente) $X_o=r_s$ $R=r_s$ y nos queda:

$f(r)^2 = 4r_s^2/r_s^2.\ e^{-r/rs}(1).r_s^1/r$
$f(r)^2 = 4r_s/r.e^{-r/rs}$ →$X(r) = r_s.e^{r/(2rs)}.[(r-r_s)/r_s]^{1/2}$

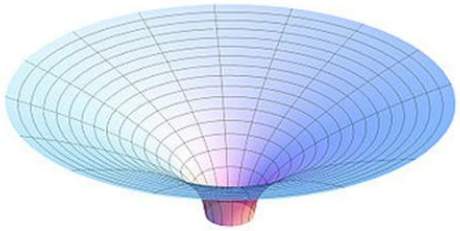
Sustituimos X(r) en el cambio de variables, y el factor de escala $f(r)^2$ en la métrica expandida.

$ct_k = e^{r/(2rs)}.[(r-r_s)r_s]^{1/2}.sh[ct/(2r_s)]$

$r_k = e^{r/(2rs)}.[(r-r_s)r_s]^{1/2}.ch[ct/(2r_s)]$

$(dS)^2 = 4r_S/r.e^{-r/rs}\ [-(c.dt_k)^2 + dr_k^2] + r(t_k,r_k)^2.d\Omega^2$

Esta métrica puede extenderse hacia el horizonte de sucesos, y eventualmente hacia adentro ajustando algunos signos. Hay una región inmediatamente exterior al horizonte, en $r \approx 1.202\ r_s$, donde el factor de escala es exactamente unitario. Para un observador ubicado allí, dr_k mide distancias y dt_k mide tiempo propio.



En el capítulo 7.3.6 graficábamos el llamado "Paraboloide de Flamm", que se obtenía al congelar t,θ en valores constantes y recurría a una dimensión extra para hacer coincidir las distancias métricas con las distancias visibles en el dibujo. La ecuación del paraboloide era $w=2.\sqrt{r_S}\ .\sqrt{(r-r_S)}$, con las paredes intensamente verticalizadas en las inmediaciones del horizonte de sucesos.

Observábamos que 'dw' era mucho más fiel que 'dr' para describir medidas, y ahora podemos correlacionar aquel resultado con nuestras coordenadas de Kruskal-Szekeres: ¡'w' y 'r_k' son proporcionales!

12.2: Solución de Reissner-Nordström:

El escenario que sigue en nivel de complejidad es la métrica que se forma en el exterior de un astro masivo con carga eléctrica neta Q. A pesar de la ausencia de materia (la masa se supone concentrada totalmente en los límites del astro $0 \leq r \leq R_a$), *aquí no son aplicables las hipótesis de vacío*. El espacio exterior al astro está lleno del campo eléctrico creado por la carga, lo cual significa que hay densidad de energía electrostática $\frac{1}{2}.\epsilon.E^2$, y esta densidad debe aparecer en la componente T_{oo} del tensor de energía-impulso, por la equivalencia masa-energía de Einstein. También las tensiones de Maxwell aparecen en otras componentes del tensor, de acuerdo con lo visto en la sección 10.3.

Vamos a reutilizar algunas ideas iniciadas en el capítulo-9, aunque con una advertencia: en aquel entonces nos contentábamos con aproximaciones de campo débil, pero aquí debemos resolver las ecuaciones exactas. Lo que implica resolver no solamente las ecuaciones de campo de Einstein sino también *las ecuaciones de Maxwell en espacios curvos*.

12.2.1: Tensor $T^{\alpha\beta}$ con traza nula:

Comenzamos demostrando esta propiedad interesante del tensor de energía-impulso en su parte electromagnética. Recurrimos a la propiedad enunciada en 10.3 y propuesta como ejercicio para demostrar:

$$T^{\alpha\beta}_{(e.m)} = -1/\mu_o.[F^{\alpha\sigma}.F_\sigma{}^\beta - (1/4).g^{\alpha\beta}.F_{\sigma\lambda}.F^{\lambda\sigma}]$$

Definimos un tensor auxiliar (ya mencionado en 5.6.5)

$Y^{\alpha\beta} = F^{\alpha\sigma}.F_\sigma{}^\beta$, simétrico.

Su versión de varianza mixta es $Y^\alpha{}_\lambda = F^{\alpha\sigma}.F_{\sigma\lambda}$

Su traza resulta $Y = Y^\lambda{}_\lambda = F^{\lambda\sigma}.F_{\sigma\lambda}$

Podemos entonces sustituir el tensor $Y^{\alpha\beta}$ y su escalar Y en la expresión del tensor de energía-impulso.

$$T^{\alpha\beta}_{(e.m)} = -1/\mu_o.[Y^{\alpha\beta} - (1/4).g^{\alpha\beta}.Y]$$

$$T^{\alpha\beta}_{(e.m)} = -1/\mu_o.[Y^{\alpha\beta} - (Y/4).g^{\alpha\beta}]$$

(Si dudamos del signo de menos, podremos convencernos cuando entremos en detalles y veamos que la componente T^{oo} debe quedar positiva).

Tomamos traza a ambos miembros.

$$\text{traza}(\ T^{\alpha\beta}_{(e.m)}\ ) = -1/\mu_o.[\ \text{traza}(Y^{\alpha\beta}) - (Y/4).\ \text{traza}(g^{\alpha\ \beta})]$$

$$\text{traza}(\ T^{\alpha\beta}_{(e.m)}\ ) = -1/\mu_o.[\ Y - (Y/4).\ 4]$$

$$\text{traza}(\ T^{\alpha\beta}_{(e.m)}\ ) = -1/\mu_o.[\ Y - Y] = 0$$

Los textos en inglés utilizan la expresión "*traceless*" para describir a esta propiedad del tensor.

Curiosidad: Si a un tensor le restamos la métrica escalada por su traza media, el efecto es un tensor con traza reversada. Ej: $R_{\alpha\beta} - (R/2).g_{\alpha\beta}$. Por el contrario, si el factor de escala de la resta es la cuarta parte de la traza, el resultado es un tensor de traza nula: ejemplo $Y^{\alpha\beta} - (Y/4).g^{\alpha\beta}$

12.2.2: Ecuación de Einstein "alternativa":

Presentamos aquí una forma alternativa para la ecuación de campo de Einstein.

Partimos de 11.1 y tomamos traza a ambos miembros:

$$R^{\alpha\beta} - R/2.g^{\alpha\beta} = 8\pi G/c^4.T^{\alpha\beta}$$

$$tr(R^{\alpha\beta}) - R/2.tr(g^{\alpha\beta}) = 8\pi G/c^4.tr(T^{\alpha\beta})$$

$$R - R/2.4 = 8\pi G/c^4.T$$

$$-R = 8\pi G/c^4.T$$

Al ser T=0 tenemos también R=0.

Lo que es útil para el caso que estamos estudiando en los alrededores del astro masivo:

aunque el tensor de Ricci no es nulo, su escalar sí es nulo.

Esta relación entre escalares R,T permite expresar las ecuaciones de Einstein en una forma alternativa que es útil para algunos escenarios.

→reinsertamos en la ecuación de Einstein

$$R^{\alpha\beta} - R/2.g^{\alpha\beta} = 8\pi G/c^4.T^{\alpha\beta}$$
$$R^{\alpha\beta} + 8\pi G/c^4.T/2.g^{\alpha\beta} = 8\pi G/c^4.T^{\alpha\beta}$$
$$R^{\alpha\beta} = -8\pi G/c^4.T/2.g^{\alpha\beta} + 8\pi G/c^4.T^{\alpha\beta}$$
$$R^{\alpha\beta} = 8\pi G/c^4.[T^{\alpha\beta} - T/2.g^{\alpha\beta}]$$

12.2.3: Ecuaciones de Maxwell-Einstein:

En Relatividad General suele ser complicado resolver por separado las ecuaciones gravitatorias y las electromagnéticas porque están acopladas.

- Por un lado la métrica modifica las ecuaciones de Maxwell
- Por otro lado, los campos son parte contribuyente de la distorsión métrica

En el mejor de los casos podremos conjeturar un campo tentativo $E=Q/(4\pi\epsilon_o.r^2)$, pero luego deberemos verificar que la suposición fue correcta; existe el riesgo de que resulte fallida y que requiera ajustes con algún factor basado en $g_{oo}(r)$ o $g_{rr}(r)$.
El procedimiento más seguro (aunque laborioso, como veremos en seguida) es resolver las ecuaciones acopladas, agregando la función incógnita E(r) a las otras incógnitas de la métrica α(r) [y β(r) si fuera necesaria una segunda función].

Tensor métrico $g_{\alpha\beta}$:

$-\alpha(r)$	0	0	0
0	$\beta(r)$	0	0
0	0	r^2	0
0	0	0	$r^2.sen^2\theta$

Tensor métrico dual $g^{\alpha\beta}$:

$-1/\alpha(r)$	0	0	0
0	$1/\beta(r)$	0	0
0	0	$1/r^2$	0
0	0	0	$1/(r^2sen^2\theta)$

Tensor de campo electromagnético $F_{\alpha\beta}$:

0	$-E^*$	0	0
E^*	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

Por similitud con el caso clásico suponemos nulas las variaciones temporales ∂_t y angulares ∂_θ ∂_φ.
Suponemos también $\vec{A}=0$, con lo que el único componente no nulo del cuadrivector A^α es $A^0=\phi/c$.
Luego el tensor $F_{\alpha\beta}=\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$ solo tiene componentes α,β=ct,r o r,ct.

A la componente F_{10} la llamamos $E^*=E(r)/c$. Usamos el nombre E=campo eléctrico con la advertencia de que luego es posible que precisemos un factor relativista para interpretarlo como un campo eléctrico clásico, algo del estilo de los γ cinemáticos o gravitatorios.

La velocidad de la luz 'c' la escondemos dentro de E*, para no estarla escribiendo a cada rato.
Como si E* fuera el campo eléctrico en un sistema de unidades en el que c=1 (es una práctica muy común en Teoría de la Relatividad).

Tensor de campo mixto $F^{\mu}{}_{\beta} = g^{\mu\alpha}F_{\alpha\beta}$

				0	–E*	0	0
				E*	0	0	0
				0	0	0	0
				0	0	0	0
–1/α(r)	0	0	0	0	E*/α	0	0
0	1/β(r)	0	0	E*/β	0	0	0
0	0	$1/r^2$	0	0	0	0	0
0	0	0	$1/(r^2\text{sen}^2\theta)$	0	0	0	0

Tensor de campo contravariante $F^{\mu\lambda} = F^{\mu}{}_{\beta}g^{\beta\lambda}$

				–1/α(r)	0	0	0
				0	1/β(r)	0	0
				0	0	$1/r^2$	0
				0	0	0	$1/(r^2\text{sen}^2\theta)$
0	E*/α	0	0	0	E*/(αβ)	0	0
E*/β	0	0	0	- E*/(αβ)	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

El determinante métrico es $g = \det[g_{\alpha\beta}] = g_{oo}.g_{rr}.g_{\theta\theta}.g_{\varphi\varphi} = -\alpha(r).\beta(r).r^2.r^2\text{sen}^2\theta = -\alpha(r).\beta(r).r^4.\text{sen}^2\theta$

$\sqrt{-g} = (\alpha\beta)^{1/2}.r^2.\text{sen}\theta$

Este determinante se usa como *atajo* para calcular rápidamente derivadas covariantes a partir de las derivadas coordenadas. Con este truco introducido en la sección 9.2.1 resolvemos la ecuación de Gauss-Coulomb en espacio curvo.

Si hablamos de *atajos*, es tentador probar soluciones con 'β' y 'α' inversos. Si esa suposición nos lleva a una inconsistencia, deberemos abandonarla y resolver β(r) explícitamente. Afortunadamente no será el caso.

Las ecuaciones de Maxwell relativistas dicen:

$\nabla_\alpha F^{\alpha\beta} = -\mu_0.J^\beta = 0$ porque no hay cargas en en espacio exterior al astro masivo

A la columna-0 del tensor electromagnético la identificamos como $F^{\alpha 0} = -E^\alpha/c$

La fórmula 9.2.1 para divergencia genérica dice $\nabla_\alpha E^\alpha = 1/\sqrt{-g}\ \partial_\alpha(\sqrt{-g}\ .E^\alpha)$

En este caso, bajo la hipótesis de β=1/α, nos queda la condición de divergencia nula:

$\partial_r(\sqrt{-g}\ E^r) = 0$

$\partial_r(r^2\text{sen}\theta.E) = 0$

$\partial_r(r^2.E(r)) = 0$

$E(r) = cte/r^2$

→Ahora sí podemos identificar esa constante por compatibilidad con la Ley de Gauss-Coulomb.

$E(r) = Q/(4\pi\epsilon_o r^2)$

Tensor auxiliar $Y^{\mu}{}_{\beta} = F^{\mu\alpha}F_{\alpha\beta}$

				0	–E*	0	0
				E*	0	0	0
				0	0	0	0
				0	0	0	0
0	E*	0	0	E^{*2}	0	0	0
- E*	0	0	0	0	E^{*2}	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Traza del tensor auxiliar (contraemos β=μ)

$Y = Y^{\mu}{}_{\mu} = 2.E^{*2}$

$Y/4 = ½.E^{*2}$

Tensor auxiliar en versión covariante $Y_{\alpha\beta} = g_{\alpha\mu}Y^{\mu}{}_{\beta}$

				E^{*2}	0	0	0
				0	E^{*2}	0	0
				0	0	0	0
				0	0	0	0
$-\alpha(r)$	0	0	0	$-\alpha.E^{*2}$			
0	$1/\alpha(r)$	0	0		$1/\alpha.E^{*2}$		
0	0	r^2	0				
0	0	0	$(r^2 sen^2\theta)$				

Restauramos el factor 'c', sustituyendo E*=E/c
Tensor de energía-impulso electromagnético $\mu_o.T_{\alpha\beta} = [Y/4.g_{\alpha\beta} - Y_{\alpha\beta}]$
$\mu_o.T_{oo}=½.E^2/c^2.(g_{oo}) - Y_{oo}$
$\mu_o.T_{oo}=½.E^2/c^2.(-\alpha(r)) + E^2/c^2.\alpha(r)$
$\mu_o.T_{oo}= +½.E^2/c^2.\alpha(r)$

$\mu_o.Trr=½.E^2/c^2.(g_{rr}) - Y_{rr}$
$\mu_o.Trr=½.E^2/c^2/\alpha(r) - E^2/c^2/\alpha(r)$
$\mu_o.Trr= -½.E^2/c^2/\alpha(r)$

→sustituimos $1/\mu_o c^2=\epsilon_o$
$T_{\alpha\beta} = ½\ \epsilon_o.E^2$

$\alpha(r)$			
	$-1/\alpha(r)$		
		r^2	
			$r^2 sen^2\theta$

12.2.4: Ecuaciones de campo:

El tensor de energía-impulso que acabamos de calcular lo debemos emparejar, a través de la constante gravitatoria $K=8\pi G/c^4$, con el tensor de Ricci de Schwarzschild del capítulo 12.1.
Recordemos que para la energía electromagnética T=0 y R=0, por lo tanto no hay términos de traza reversada $-R/2.g_{\alpha\beta}$ ni $-T/2.g_{\alpha\beta}$.

$R_{00} =\alpha(r)/2.\ [\alpha''(r) + 2.\alpha'(r)/r\ ]$
$R_{rr} = -[\alpha''(r) + 2.\alpha'/r\ ]\ /[2\alpha(r)]$
$R_{\theta\theta} = -r.\alpha'(r) + 1 - \alpha(r)$
$R_{\varphi\varphi} = R_{\theta\theta}.sen^2\theta$

Son 4 ecuaciones con 1 sola incógnita, cualquier solución que encontremos luego deberemos sustituirla en las otras 3 ecuaciones.

Ecuación polar:

Empezamos por la ecuación en el ángulo polar, que al menos involucra solo derivadas primeras $\alpha'(r)$.

$R_{\theta\theta} = K.T_{\theta\theta}$
$-r.\alpha' + 1 - \alpha = ½.\epsilon_o.E^2.K.r^2$ →sustituimos $E(r)= Q/(4\pi.\epsilon_o r^2)$
$-r.\alpha' + 1 - \alpha = ½.\epsilon_o.[Q^2/(16\pi^2.\epsilon_o^2 r^4)].K.r^2$
$-r.\alpha' + 1 - \alpha = Q^2/(32\pi^2.\epsilon_o r^2).K$ →sustituimos $K= 8\pi G/c^4$
$-r.\alpha' + 1 - \alpha = Q^2/(32\pi^2.\epsilon_o r^2).8\pi G/c^4$
$-r.\alpha' + 1 - \alpha = Q^2/(4\pi.\epsilon_o r^2)G/c^4$
$-r.\alpha' + 1 - \alpha = Q^2G/(4\pi.\epsilon_o c^4)/r^2$

Definimos una constante con unidades de distancia r_q tal que $r_q^2= G.Q^2/(4\pi.\epsilon_o c^4)$

$-r.\alpha' + 1 - \alpha = r_q^2/r^2$
$1 - r_q^2/r^2 = r.\alpha' + \alpha$ →reconocemos derivada exacta
$1 - r_q^2/r^2 = \partial_r(r.\alpha)$ →integramos diferenciales exactos
$r + r_q^2/r = r.\alpha + CI$ CI=constante de integración

$r + r_q^2/r - CI = r.\alpha$

$1 + r_q^2/r^2 - CI/r = \alpha$

En el límite de los campos lejanos, el término "extra" eléctrico produce perturbaciones métricas que decaen más fuertemente. El término dominante es el CI/r que decae más lentamente; es una perturbación causada por la masa del astro, así que identificamos $CI=r_S$.

$$\alpha(r) = 1 - r_S/r + r_q^2/r^2$$

Ecuación acimutal:

El tensor de Ricci en su parte angular verifica $R_{\varphi\varphi} = R_{\theta\theta}.sen^2\theta$

El tensor de energía-impulso también cumple $T_{\varphi\varphi} = T_{\theta\theta}.sen^2\theta$, así que al menos 2 de las 4 ecuaciones no se contradicen, simplemente afirman lo mismo.

Ecuación radial:

Por otro lado, la parte radial y la temporal del Ricci están relacionadas:

$R_{oo}=\alpha.f$ $\quad$ $R_{rr}= -f/\alpha$ $\quad$ siendo $f= ½.[\alpha'' + 2\alpha'/r]$

$\rightarrow R_{oo}/R_{rr}= -\alpha^2$

La misma relación la cumplen los componentes radiales y temporales del tensor de materia.

$T_{oo}/T_{rr}= -\alpha^2$

Encontramos otra redundancia. Solo falta probar que la solución temporal es la misma que la angular.

Ecuación temporal:

$R_{00} = K.T_{00}$

$\alpha(r)/2.[\alpha''(r) + 2.\alpha'(r)/r] = K . \alpha(r)/2.\epsilon_0.E^2$ $\quad$ →cancelamos

$\alpha''(r) + 2.\alpha'(r)/r = K . \epsilon_0.E^2$ $\quad$ →Sustituimos K, E

$\alpha''(r) + 2.\alpha'(r)/r = 8\pi G/c^4 . \epsilon_0.[Q^2/(16\pi^2.\epsilon_o^2 r^4)]$

$\alpha''(r) + 2.\alpha'(r)/r = G/c^4 .[Q^2/(2\pi.\epsilon_o r^4)]$

$\alpha''(r) + 2.\alpha'(r)/r = Q^2G/(2\pi.\epsilon_o c^4)/r^4$ $\quad$ $\rightarrow r_q^2= G.Q^2/(4\pi.\epsilon_o c^4)$

$\alpha''(r) + 2.\alpha'(r)/r = 2r_q^2/r^4$

$r^2\alpha''(r) + 2.r.\alpha'(r) = 2r_q^2/r^2$ $\quad$ →derivada exacta de producto

$\partial_r[r^2.\alpha'(r)] = 2r_q^2/r^2$ $\quad$ →integramos

$r^2.\alpha'(r) = -2r_q^2/r + r_S$ $\quad$ ya nombramos la constante de integración

$\alpha'(r) = -2r_q^2/r^3 + r_S/r^2$ $\quad$ →integramos otra vez

$\alpha(r) = r_q^2/r^2 - r_S/r + C$ $\quad$ C=1 para límite clásico $\alpha=1$ en $r\rightarrow\infty$

$$\rightarrow \alpha(r) = 1 - r_S/r + r_q^2/r^2$$

12.2.5: Métrica de Reissner-Nordström completa:

$$(dS)^2 = -(c.dt)^2.(1 - r_S/r + r_q^2/r^2) + (dr)^2/(1 - r_S/r + r_q^2/r^2) + r^2.(d\theta^2 + sen^2\theta d\varphi^2)$$

Algunas curiosidades:

→Sigue valiendo $r_S=2MG/c^2$ como en la solución anterior del astro masivo de Schwarzschild.

Pero ahora el parámetro 'M', si bien tiene unidades de masa, *no coincide con la masa material del astro*. La expresión correcta sería $M=func(Mo,M_Q)$ donde Mo=masa propia y M_Q = un extra debido a la energía electrostática encerrada en el volumen ocupado por el astro masivo y cargado. En el límite en que la carga 'Q' tiende a cero, deberían coincidir $M \approx Mo$.

→El potencial gravitatorio asociado al $\alpha(r)$ es $\Phi_g(r) = c^2/2.(r_q^2/r^2 - r_S/r)$

El término que depende de la carga opera con signo contrario al de la masa. Eso está sugiriendo que si nos acercamos lo suficiente a las fuentes podríamos ingresar a una región con gravedad repulsiva en lugar de atractiva. Para que esta hipotética región caiga en la zona vacía fuera de la distribución de fuentes es necesario llegar al orden de magnitud del colapso, es decir, a un **agujero negro Reissner-Nordström**.

12.3 Solución interna de Schwarzschild:

Continuamos avanzando en nivel de complejidad.
Ahora abordamos el estudio del interior de un astro masivo con simetría esférica, donde están presentes las porciones de masa causantes de la distorsión métrica *y también las presiones que mantienen unida a la materia en forma compacta*.
El escalar de Ricci ya no es nulo, lo que marca una diferencia de complejidad con el escenario anterior.
Tampoco va a ser sostenible la simplificación $\beta.\alpha=1$, en este capítulo vamos a necesitar contemplar una situación más general donde el coeficiente radial $\beta(r)$ no es inverso del temporal $\alpha(r)$.

12.3.1 Matrices de Christoffel:

Comenzamos con la métrica genérica propuesta en 11.5.

$$\mathcal{L}(X^\lambda,\dot{X}^\lambda,\tau)= -m_o.c^2.\ \sqrt{\dot{t}^2.\alpha(r) -\beta(r).\dot{r}^2/c^2 - r^2.\Omega^2/c^2}$$

Que corresponde a un tensor métrico diagonal.

$g_{\lambda\mu}=$

$$\begin{bmatrix} -\alpha(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 sen^2\theta \end{bmatrix}$$

Los símbolos de Christoffel los calculamos en base al método de las geodésicas.

Coordenada temporal:

$P_{ct}=1/c.\partial\mathcal{L}/\partial\dot{t} = -m_o.c/(2\sqrt{\ }).2.\dot{t}.\alpha(r)$
$\partial\mathcal{L}/\partial t = 0 \rightarrow dP_{ct}/d\tau=0$
$\dot{t}.\alpha(r) = cte$
$\ddot{t}\ \alpha(r) + \dot{t}.\alpha'(r).\dot{r} = 0$
$\ddot{t} + \alpha'(r)/\alpha(r).\ \dot{t}\ \dot{r} = 0$

Esta ecuación geodésica es de la forma $dU^o/d\tau + \Gamma^o{}_{\lambda\mu}U^\mu = 0$
con $\Gamma^0{}_{0r}= \Gamma^0{}_{r0} = \frac{1}{2}.\alpha'(r)/\alpha(r)$
Solo registramos los símbolos de Christoffel que dan diferente de 0.
Observación: el factor ½ es necesario porque aparecen 2 términos iguales en la expansión de la forma cuadrática, una vez por (0,r) y otra vez por (r,0).

Coordenada radial:

$P_r=\partial\mathcal{L}/\partial\dot{r} = m_o.\beta(r).\dot{r}$
$dP_r/d\tau = m_o.\beta(r).\ddot{r} + m_o.\beta'(r).\dot{r}^2$
$\partial\mathcal{L}/\partial r = -m_o.c^2/(2\sqrt{\ }).[\ \dot{t}^2\alpha'(r) -\dot{r}^2/c^2.\beta'(r) -2.r.\Omega^{\bullet 2}/c^2\ ]$
$\partial\mathcal{L}/\partial r = m_o.[\ -c^2/2.\ \dot{t}^2\alpha'(r) +\dot{r}^2.\beta'(r)/2 +r.\Omega^{\bullet 2}\ ]$
$dP_r/d\tau = \partial\mathcal{L}/\partial r$
$m_o.\beta(r).\ddot{r} + m_o.\beta'(r).\dot{r}^2 = m_o.[\ -c^2/2.\ \dot{t}^2\alpha'(r) +\dot{r}^2.\beta'(r)/2 +r.\Omega^{\bullet 2}\ ]$
$\beta(r).\ddot{r} + \beta'(r).\dot{r}^2 = -c^2/2.\ \dot{t}^2\alpha'(r) +\dot{r}^2.\beta'(r)/2 +r.\Omega^{\bullet 2}$
$\beta(r).\ddot{r} + \beta'(r).\dot{r}^2/2 = -c^2/2.\ \dot{t}^2\alpha'(r) +r.\Omega^{\bullet 2}$
$\beta(r).\ddot{r} + \beta'(r).\dot{r}^2/2 + c^2/2.\ \dot{t}^2\alpha'(r) - r.\Omega^{\bullet 2} =0$
$\beta(r).\ddot{r} + \beta'(r).\dot{r}^2/2 + c^2/2.\ \dot{t}^2\alpha'(r) - r.(\theta^{\bullet 2} + sen^2\theta\ \varphi^{\bullet 2}) =0$
$\ddot{r} + \beta'(r)/2/\beta(r).\dot{r}^2 + c^2\dot{t}^2\alpha'(r)/2/\beta(r) - r/\beta(r).(\theta^{\bullet 2} + sen^2\theta\ \varphi^{\bullet 2}) =0$
$\ddot{r} + c^2\dot{t}^2\alpha'(r)/2/\beta(r) + \beta'(r)/2/\beta(r).\dot{r}^2\ - r/\beta(r).(\theta^{\bullet 2} + sen^2\theta\ \varphi^{\bullet 2}) =0$

Esta ecuación geodésica es de la forma $dU^r/d\tau + \Gamma^r{}_{\lambda\mu}U^\mu = 0$

con $\Gamma^r_{00}= \alpha'(r)/2/\beta(r)$ $\Gamma^r_{rr}=\beta'(r)/2/\beta(r)$ $\Gamma^r_{\theta\theta}= -r/\beta(r)$ $\Gamma^r_{\varphi\varphi}= -r.sen^2\theta/\beta(r)$

Observación: Nos quedan coeficientes de la forma $\alpha'(r)/\alpha(r)$, $\beta'(r)/\beta(r)$, expresables como derivada de logaritmo $\partial_r log[\alpha(r)]$ y $\partial_r log[\beta(r)]$.
Más adelante les pondremos nombre a esos logaritmos $A(r)=log[\alpha(r)]$ y $B(r)=log[\beta(r)]$; esto va a ayudar a simplificar la solución de las ecuaciones diferenciales.

Coordenada polar:

$P_\theta=\partial\mathcal{L}/\partial\dot{\theta} = m_o. r^2.\dot{\theta}$

$dP_\theta/d\tau = m_o. r^2.\ddot{\theta} +2.m_o.r.\dot{r}.\dot{\theta}$

$\partial\mathcal{L}/\partial\theta = -m_o.c^2/(2\sqrt{\ }).[2.sen\theta.cos\theta.r^2/\dot{\varphi}^2/c^2]$

$\partial\mathcal{L}/\partial\theta = m_o.[sen\theta.cos\theta.r^2/\dot{\varphi}^2]$

$dP_\theta/d\tau = \partial\mathcal{L}/\partial\theta$

$m_o. r^2.\ddot{\theta} +2.m_o.r.\dot{r}.\dot{\theta} = m_o.[sen\theta.cos\theta.r^2/\dot{\varphi}^2]$

$r^2.\ddot{\theta} +2.r.\dot{r}.\dot{\theta} = sen\theta.cos\theta.r^2/\dot{\varphi}^2$

$r^2.\ddot{\theta} +2.r.\dot{r}.\dot{\theta} -sen\theta.cos\theta.r^2/\dot{\varphi}^2 = 0$

$\ddot{\theta} +2/r.\dot{r}.\dot{\theta} -sen\theta.cos\theta/\dot{\varphi}^2 = 0$

Esta ecuación geodésica es de la forma $dU^\theta/d\tau + \Gamma^\theta_{\lambda\mu}U^\mu = 0$

con $\Gamma^\theta_{r\theta}=\Gamma^\theta_{\theta r}= 1/r$ $\Gamma^\theta_{\varphi\varphi}= -sen\theta.cos\theta$

Coordenada acimutal:

$P_\varphi=\partial\mathcal{L}/\partial\dot{\varphi} = m_o.r^2.sen^2\theta.\dot{\varphi}$

$\partial\mathcal{L}/\partial\varphi = 0 \rightarrow dP_\varphi/d\tau=0$

$r^2.sen^2\theta.\dot{\varphi}=cte$

$r^2.sen^2\theta.\ddot{\varphi} + 2r.sen^2\theta.\dot{r}.\dot{\varphi} +2sen\theta cos\theta\ \dot{\theta}.\dot{\varphi}=0$

$\ddot{\varphi} + 2/r.\dot{r}.\dot{\varphi} +2cos\theta/sen\theta\ \dot{\theta}.\dot{\varphi}=0$

Esta ecuación geodésica es de la forma $dU^\varphi/d\tau + \Gamma^\varphi_{\lambda\mu}U^\mu = 0$

con $\Gamma^\varphi_{r\varphi}= \Gamma^\varphi_{\varphi r} = 1/r$ $\Gamma^\varphi_{\varphi\theta}= \Gamma^\varphi_{\theta\varphi}= cos\theta/sen\theta$

Juntamos todos los símbolos de Christoffel no nulos para armar las matrices.
Para evitar equivocarnos utilizamos colores diferentes, y luego verificamos con el software Maxima.

$\Gamma^0_{0r}= \frac{1}{2}.\alpha'(r)/\alpha(r)$ $\Gamma^0_{r0} = \frac{1}{2}.\alpha'(r)/\alpha(r)$

$\Gamma^r_{00}= \alpha'(r)/2/\beta(r)$ $\Gamma^r_{rr}=\beta'(r)/2/\beta(r)$ $\Gamma^r_{\theta\theta}= -r/\beta(r)$ $\Gamma^r_{\varphi\varphi}= -r.sen^2\theta/\beta(r)$

$\Gamma^\theta_{r\theta} =\Gamma^\theta_{\theta r} = 1/r$ $\Gamma^\theta_{\varphi\varphi}= -sen\theta.cos\theta$

$\Gamma^\varphi_{r\varphi}= \Gamma^\varphi_{\varphi r} = 1/r$ $\Gamma^\varphi_{\varphi\theta}=\Gamma^\varphi_{\theta\varphi}= cos\theta/sen\theta$

$[C_{ct}]= \Gamma^\lambda_{\mu,ct} =$

λ \ μ	Ct	r	θ	φ
ct		½.α'(r)/α(r)		
r	α'(r)/2/β(r)			
θ				
φ				

$[C_r]= \Gamma^\lambda_{\mu,r} =$

λ \ μ	Ct	r	θ	φ
ct	½.α'(r)/α(r)			
r		β'(r)/2/β(r)		
θ			1/r	
φ				1/r

$[C_\theta]= \Gamma^{\lambda}_{\mu,\theta} =$

λ \ μ	Ct	r	θ	φ
ct				
r			$-r/\beta(r)$	
θ		1/r		
φ				$\cos\theta/\sen\theta$

$[C_\varphi]= \Gamma^{\lambda}_{\mu,\varphi} =$

λ \ μ	ct	r	θ	φ
ct				
r				$-r.\sen^2\theta/\beta(r)$
θ				$-\sen\theta.\cos\theta$
φ		1/r	$\cos\theta/\sen\theta$	

→Cambio de notación: $\alpha(r)=e^{A(r)}$, $\beta(r)=e^{B(r)}$.

$[C_{ct}]= \Gamma^{\lambda}_{\mu,ct} =$

λ \ μ	ct	r	θ	φ
ct		A'/2		
r	$A'/2.e^{A-B}$			
θ				
φ				

$[C_r]= \Gamma^{\lambda}_{\mu,r} =$

λ \ μ	ct	r	θ	φ
ct	A'/2			
r		B'/2		
θ			1/r	
φ				1/r

$[C_\theta]= \Gamma^{\lambda}_{\mu,\theta} =$

λ \ μ	ct	r	θ	φ
ct				
r			$-re^{-B}$	
θ		1/r		
φ				$\cos\theta/\sen\theta$

$[C_\varphi]= \Gamma^{\lambda}_{\mu,\varphi} =$

λ \ μ	ct	r	θ	φ
ct				
r				$-r.\sen^2\theta.e^{-B}$
θ				$-\sen\theta.\cos\theta$
φ		1/r	$\cos\theta/\sen\theta$	

12.3.2 Tensor de Riemann:

Para cada pareja de índices αβ debemos calcular:

$R^{\lambda}_{\mu\alpha\beta} = \partial_\alpha[C_\beta] - \partial_\beta[C_\alpha] + [C_\alpha].[C_\beta] - [C_\beta].[C_\alpha]$

Esto está expresado como una operación matricial, *pero no es necesario calcular explícitamente todos los coeficientes*. Por el momento nos concentramos únicamente en aquellos coeficientes que luego van a contribuir a la diagonal del tensor de Ricci.

En principio podría parecer que solo necesitamos evaluar λ=α μ=β porque $R^{\alpha}_{\beta\alpha\beta}$ contribuye a $R_{\beta\beta}$.

Sin embargo, veremos que también conviene calcular la combinación cruzada λ=β, μ=α →$R^{\beta}_{\alpha\alpha\beta}$

$R^{\beta}_{\alpha\alpha\beta}$, si bien no participa de ningún componente del Ricci, es numéricamente igual a $-R^{\beta}_{\alpha\beta\alpha}$, el cual forma parte de $R_{\alpha\alpha}$.

Comenzamos entonces el paseo por cada pareja de variables con α<β.

Es un procedimiento tedioso pero consideramos instructivo realizarlo al menos una vez en la carrera.

- α=0, β=r.

Armamos las operaciones matriciales y sombreamos las casillas λμ=0r o r0, para saber en cuál casillero concentramos los esfuerzos.

$R^{\lambda}_{\mu 0r} = \partial_0[C_r] - \partial_r[C_0] + [C_0].[C_r] - [C_r].[C_0]$

$\partial_0[C_r]=0$ porque la métrica es estática, no depende de la coordenada temporal

$\partial_r[C_0]$ =

λ \ μ	ct	r	θ	φ
ct		A''/2		
r	$[(A'^2-A'B')+A'']/2.e^{A-B}$			
θ				
φ				

$[C_0].[C_r]$ =

				A'/2	0	0	0
				0	B'/2	0	0
				0	0	1/r	0
				0	0	0	1/r
0	A'/2	0	0	0	A'B'/4	0	0
$A'/2.e^{A-B}$	0	0	0	$A'^2/4.e^{A-B}$	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

<--$[C_0].[C_r]$

$[C_r].[C_0]$ =

				0	A'/2	0	0
				$A'/2.e^{A-B}$	0	0	0
				0	0	0	0
				0	0	0	0
A'/2	0	0	0	0	$A'^2/4$	0	0
0	B'/2	0	0	$A'B'/4e^{A-B}$	0	0	0
0	0	1/r	0	0	0	0	0
0	0	0	1/r	0	0	0	0

<--$[C_r].[C_0]$

$\rightarrow R^{0}_{r0r} = 0 - A''/2 + A'B'/4 - A'^2/4$

$\rightarrow R^{0}_{r0r} = -A''/2 + A'B'/4 - A'^2/4$

$\rightarrow R^{r}_{00r} = 0 - [A''+A'^2-A'B']/2.e^{A-B} + A'^2/4.e^{A-B} - A'B'/4.e^{A-B}$

$= [-A''/2 - A'^2/2 + A'B'/2 - A'B'/4 + A'^2/4].e^{A-B}$

$\rightarrow R^{r}_{00r} = e^{A-B}.[-A''/2 + A'B'/4 - A'^2/4]$ $\quad R^{r}_{0r0} = e^{A-B}.[A''/2 - A'B'/4 + A'^2/4]$

- α=0, β=θ.

Armamos las operaciones matriciales y sombreamos las casillas λμ=0θ o θ0

$R^{\lambda}_{\mu 0\theta} = \partial_0[C_\theta] - \partial_\theta[C_0] + [C_0].[C_\theta] - [C_\theta].[C_0]$

$\partial_0[C_\theta]=0$

$\partial_\theta[C_0] = 0$

$[C_0].[C_\theta]$ =

				0	0	0	0
				0	0	$-r.e^{-B}$	0
				0	1/r	0	0
				0	0	0	ctg(θ)
0	A'/2	0	0	0	0	$-r.A'/2.e^{-B}$	0
$A'/2.e^{A-B}$	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

<--$[C_0].[C_\theta]$

$[C_\theta].[C_0]$ =

				0	A'/2	0	0
				$A'/2.e^{A-B}$	0	0	0
				0	0	0	0
				0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	$-re^{-B}$	0	0	0	0	0
0	1/r	0	0	$A'/2/r.e^{A-B}$	0	0	0
0	0	0	ctg(θ)	0	0	0	0

<--$[C_\theta].[C_0]$

$R^0_{\theta 0\theta} = 0 - 0 + -rA'/2.e^{-B} - 0$

$R^0_{\theta 0\theta} = -r.A'/2.e^{-B}$

$R^\theta_{000} = 0 - 0 + 0 - A'/2/r.e^{A-B}$

$R^\theta_{000} = -A'/2/r.e^{A-B}$ $R^\theta_{0\theta 0} = A'/2/r.e^{A-B}$

- α=0, β=φ.

Armamos las operaciones matriciales y sombreamos las casillas λμ=0φ o φ0

$R^\lambda_{\mu 0\varphi} = \partial_0[C_\varphi] - \partial_\varphi[C_0] + [C_0].[C_\varphi] - [C_\varphi].[C_0]$

$\partial_0[C_\varphi]=0$

$\partial_\varphi[C_0] = 0$

$[C_0].[C_\varphi]$ =

				0	0	0	0
				0	0	0	$-r.sen^2\theta.e^{-B}$
				0	0	0	$-sen\theta.cos\theta$
				0	1/r	$cos\theta/sen\theta$	0
0	A'/2	0	0	0	0	0	$-rA'/2.sen^2\theta e^{-B}$
$A'/2.e^{A-B}$	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

<--$[C_0].[C_\varphi]$

$[C_\varphi].[C_0]$ =

				0	A'/2	0	0
				$A'/2.e^{A-B}$	0	0	0
				0	0	0	0
				0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	$-r.sen^2\theta.e^{-B}$	0	0	0	0
0	0	0	$-sen\theta.cos\theta$	0	0	0	0
0	1/r	$cos\theta/sen\theta$	0	$A'/(2r).e^{A-B}$	0	0	0

<--$[C_\varphi].[C_0]$

$R^0{}_{\varphi 0 \varphi} = 0 - 0 + -rA'/2.sen^2\theta e^{-B} - 0$

$R^0{}_{\varphi 0 \varphi} = -r.A'/2.sen^2\theta.e^{-B}$

$R^\varphi{}_{00\varphi} = 0 - 0 + 0 - A'/2/r.e^{A-B}$

$R^\varphi{}_{00\varphi} = -A'/2/r.e^{A-B}$ $\quad$ $R^\varphi{}_{0\varphi 0} = A'/2/r.e^{A-B}$

- $\alpha=r$, $\beta=\theta$.

Armamos las operaciones matriciales y sombreamos las casillas $\lambda\mu=r\theta$ o θr

$R^\lambda{}_{\mu r\theta} = \partial_r[C_\theta] - \partial_\theta[C_r] + [C_r].[C_\theta] - [C_\theta].[C_r]$

$\partial_r[C_\theta]$ =

0	0	0	0
0	0	$-e^{-B}+r.B'.e^{-B}$	0
0	$-1/r^2$	0	0
0	0	0	0

$\partial_\theta[C_r] = 0$

$[C_r].[C_\theta]$ =

				0	0	0	0
				0	0	$-r.e^{-B}$	0
				0	1/r	0	0
				0	0	0	ctg(θ)
A'/2	0	0	0	0	0	0	0
0	B'/2	0	0	0	0	$-rB'/2e^{-B}$	0
0	0	1/r	0	0	$1/r^2$	0	0
0	0	0	1/r	0	0	0	ctg(θ)/r

<--$[C_r].[C_\theta]$

$[C_\theta].[C_r]$ =

				A'/2	0	0	0
				0	B'/2	0	0
				0	0	1/r	0
				0	0	0	1/r
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	$-r.e^{-B}$	0	0	0	$-e^{-B}$	0
0	1/r	0	0	0	B'/(2r)	0	0
0	0	0	ctg(θ)	0	0	0	ctg(θ)/r

<--$[C_\theta].[C_0]$

$R^r{}_{\theta r\theta} = -e^{-B}+r.B'.e^{-B} - 0 + -rB'/2.e^{-B} - (-e^{-B})$

$R^{r}{}_{\theta r\theta} = r.B'/2.e^{-B}$

$R^{\theta}{}_{rr\theta} = -1/r^2 - 0 + 1/r^2 - B'/(2r)$

$R^{\theta}{}_{rr\theta} = -B'/(2r)$ $\qquad$ $R^{\theta}{}_{r\theta r} = +B'/(2r)$

- α=r, β=φ.

Armamos las operaciones matriciales y sombreamos las casillas λμ=rφ o φr

$R^{\lambda}{}_{\mu r\varphi} = \partial_r[C_\varphi] - \partial_\varphi[C_r] + [C_r].[C_\varphi] - [C_\varphi].[C_r]$

$\partial_r[C_\varphi] =$

0	0	0	0
0	0	0	$sen^2\theta.[-e^{-B}+rB'e^{-B}]$
0	0	0	0
0	$-1/r^2$	0	0

$\partial_\varphi[C_r] = 0$

$[C_r].[C_\varphi] =$

				0	0	0	0
				0	0	0	$-r.sen^2\theta.e^{-B}$
				0	0	0	$-sen\theta.cos\theta$
				0	1/r	$cos\theta/sen\theta$	0
A'/2	0	0	0	0	0	0	0
0	B'/2	0	0	0	0	0	$-r.B'/2.sen^2\theta e^{-B}$
0	0	1/r	0	0	0	0	0
0	0	0	1/r	0	$1/r^2$	0	0

<--$[C_r].[C_\varphi]$

$[C_\varphi].[C_r] =$

				A'/2	0	0	0
				0	B'/2	0	0
				0	0	1/r	0
				0	0	0	1/r
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	$-r.sen^2\theta.e^{-B}$	0	0	0	$-sen^2\theta e^{-B}$
0	0	0	$-sen\theta.cos\theta$	0	0	0	0
0	1/r	$cos\theta/sen\theta$	0	0	B'/(2r)	0	0

<--$[C_\varphi].[C_r]$

$R^{r}{}_{\varphi r\varphi} = sen^2\theta e^{-B}(-1+rB') - 0 + (-rB'/2)sen^2\theta e^{-B} - (-sen^2\theta e^{-B}) = sen^2\theta e^{-B}.(-1 + rB' - rB'/2 + 1) =$

$R^{r}{}_{\varphi r\varphi} = r.B'/2.sen^2\theta e^{-B}$

$R^{\varphi}{}_{rr\varphi} = -1/r^2 - 0 + 1/r^2 - B'/(2r)$

$R^{\varphi}{}_{rr\varphi} = -B'/(2r)$ $\qquad$ $R^{\varphi}{}_{r\varphi r} = B'/(2r)$

- α=θ, β=φ.

Armamos las operaciones matriciales y sombreamos las casillas λμ=θφ o φθ

$R^{\lambda}{}_{\mu\theta\varphi} = \partial_\theta[C_\varphi] - \partial_\varphi[C_\theta] + [C_\theta].[C_\varphi] - [C_\varphi].[C_\theta]$

$\partial_\theta[C_\varphi]$ =

0	0	0	0
0	0	0	$-2r.sen\theta.cos\theta e^{-B}$
0	0	0	$-cos^2\theta + sen^2\theta$
0	0	$-1/sen^2\theta$	0

$\partial_\varphi[C_\theta] = 0$

$[C_\theta].[C_\varphi]$ =

				0	0	0	0
				0	0	0	$-r.sen^2\theta.e^{-B}$
				0	0	0	$-sen\theta.cos\theta$
				0	1/r	$cos\theta/sen\theta$	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	$-r.e^{-B}$	0	0	0	0	0
0	1/r	0	0	0	0	0	$-sen^2\theta e^{-B}$
0	0	0	ctg(θ)	0	0	$cos^2\theta/sen^2\theta$	0

<--$[C_\theta].[C_\varphi]$

$[C_\varphi].[C_\theta]$ =

				0	0	0	0
				0	0	$-r.e^{-B}$	0
				0	1/r	0	0
				0	0	0	ctg(θ)
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	$-r.sen^2\theta.e^{-B}$	0	0	0	0
0	0	0	$-sen\theta.cos\theta$	0	0	0	$-cos^2\theta$
0	1/r	$cos\theta/sen\theta$	0	0	0	$-e^{-B}$	0

<--$[C_\varphi].[C_\theta]$

$R^\theta{}_{\varphi\theta\varphi} = -cos^2\theta + sen^2\theta - 0 + -sen^2\theta e^{-B} - (-cos^2\theta) = sen^2\theta(1-e^{-B})$

$$R^\theta{}_{\varphi\theta\varphi} = sen^2\theta[1 - e^{-B}]$$

$R^\varphi{}_{\theta\theta\varphi} = -1/sen^2\theta - 0 + cos^2\theta/sen^2\theta - (-e^{-B}) = -1 + e^{-B}$

$$R^\varphi{}_{\theta\theta\varphi} = -(1-e^{-B})$$

$$R^\varphi{}_{\theta\varphi\theta} = 1-e^{-B}$$

Resumen de coeficientes de Riemann:

$R^0{}_{r0r} = -A''/2 + A'B'/4 - A'^2/4$

$R^r{}_{0r0} = e^{A-B}.[A''/2 - A'B'/4 + A'^2/4]$

$R^0{}_{\theta 0\theta} = -r.A'/2.e^{-B}$

$R^\theta{}_{0\theta 0} = A'/2/r.e^{A-B}$

$R^0{}_{\varphi 0\varphi} = -r.A'/2.sen^2\theta.e^{-B}$

$R^\varphi{}_{0\varphi 0} = A'/2/r.e^{A-B}$

$R^r{}_{\theta r\theta} = r.B'/2.e^{-B}$

$R^\theta{}_{r\theta r} = B'/(2r)$

$R^r{}_{\varphi r\varphi} = r.B'/2.sen^2\theta e^{-B}$

$R^\varphi{}_{r\varphi r} = B'/(2r)$

$R^\theta{}_{\varphi\theta\varphi} = sen^2\theta[1 - e^{-B}]$

$R^\varphi{}_{\theta\varphi\theta} = 1-e^{-B}$

12.3.3 Tensor de Ricci:

$Roo = R^{r}_{0r0} + R^{\theta}_{0\theta0} + R^{\varphi}_{0\varphi0} = e^{A-B}.[A''/2 - A'B'/4 + A'^2/4] + A'/2/r.e^{A-B} + A'/2/r.e^{A-B}$

$Roo = e^{A-B}.[A''/2 - A'B'/4 + A'^2/4 + A'/(2r) + A'/(2r)]$

$$Roo = e^{A-B}.[A''/2 - A'B'/4 + A'^2/4 + A'/r]$$

$Rrr = R^{0}_{r0r} + R^{\theta}_{r\theta r} + R^{\varphi}_{r\varphi r} =$

$Rrr = -A''/2 + A'B'/4 - A'^2/4 + B'/(2r) + B'/(2r)$

$$Rrr = -A''/2 + A'B'/4 - A'^2/4 + B'/r$$

$R_{\theta\theta} = R^{0}_{\theta0\theta} + R^{r}_{\theta r\theta} + R^{\varphi}_{\theta\varphi\theta} =$

$$R_{\theta\theta} = -r.A'/2.e^{-B} + r.B'/2.e^{-B} + 1 - e^{-B}$$

$R_{\varphi\varphi} = R^{0}_{\varphi0\varphi} + R^{r}_{\varphi r\varphi} + R^{\theta}_{\varphi\theta\varphi} =$

$R_{\varphi\varphi} = -r.A'/2.sen^2\theta.e^{-B} + r.B'/2.sen^2\theta e^{-B} + sen^2\theta[1 - e^{-B}]$

$R_{\varphi\varphi} = sen^2\theta\,[-r.A'/2.e^{-B} + r.B'/2e^{-B} + 1 - e^{-B}]$

$$R_{\varphi\varphi} = sen^2\theta\,[-r.A'/2.e^{-B} + r.B'/2e^{-B} + 1 - e^{-B}]$$

12.3.4: Tensor de energía-impulso con presiones:

Mantenemos la ecuación de campo alternativa planteada en 12.2, expresándola en forma covariante:

$$R_{\alpha\beta} = 8\pi G/c^4.[T_{\alpha\beta} - T/2.g_{\alpha\beta}]$$

Recurrimos a la fórmula de la sección 10.2.2 "Fluido perfecto", cuidando de utilizar la métrica completa $g_{\alpha\beta}$ y no la de Minkowski.

$T_{\alpha\beta} = (\rho_o + p/c^2)U_\alpha U_\beta + p.g_{\alpha\beta}$

Efectuamos los cálculos en base a la suposición de métrica estática: la materia que forma este astro masivo está quieta, su única componente de la cuadrivelocidad es la temporal $U^\alpha=(c.\dot{t},0,0,0)$.

Bajando índices tenemos $U_\alpha=(g_{00}.c.\dot{t},0,0,0) = (-e^A.c.\dot{t},0,0,0)$

$U_\alpha.U^\alpha = -e^A c^2 \dot{t}^2$

La normalización de la cuadrivelocidad implica $U_\alpha.U^\alpha = -c^2 \rightarrow \dot{t}^2 = e^{-A}$

$U_\alpha = (-e^{A/2}.c,0,0,0)$

El producto tensorial $U_\alpha U_\beta$ solo tiene no nula su componente 00 y vale c^2e^A

Al sumar la métrica escalada con las presiones en la diagonal, queda:

$T_{\alpha\beta}$ =

$\rho_o.c^2.e^A$			
	$p.e^B$		
		$p.r^2$	
			$p.r^2sen^2\theta$

$T_\alpha^{\ \lambda} = T_{\alpha\beta}.g^{\beta\lambda}$

$T_\alpha^{\ \lambda}$ =

$-\rho_o.c^2$			
	p		
		p	
			p

La traza es $T_\lambda^{\ \lambda} = T = 3p - \rho_o.c^2$

Para la ecuación de campo en su forma alternativa precisamos calcular:

$T_{\alpha\beta} - T/2.g_{\alpha\beta}$ =

$e^A (3p+\rho_o.c^2)/2$			
	$e^B(\rho_o c^2-p)/2$		
		$r^2.(\rho_o c^2-p)/2$	
			$r^2 sen^2\theta(\rho_o c^2-p)/2$

12.3.5: Ecuaciones de campo:

Traemos del capítulo 12.1 las 4 componentes diagonales del tensor de Ricci para igualar con sus respectivas componentes recién calculadas en el "lado derecho" de las energías:

$R_{\alpha\beta} = 8\pi G/c^4.[T_{\alpha\beta} - T/2.g_{\alpha\beta}]$

$R_{00} = e^{A-B}.[A''/2 - A'B'/4 + A'^2/4 + A'/r] = 8\pi G/c^4 .e^A(\rho_o c^2+3p)/2$
$R_{rr} = -A''/2 + A'B'/4 - A'^2/4 + B'/r = 8\pi G/c^4 .e^B(\rho_o c^2-p)/2$
$R_{\theta\theta} = -r.A'/2.e^{-B} + r.B'/2.e^{-B} + 1 - e^{-B} = 8\pi G/c^4 .r^2(\rho_o c^2-p)/2$
$R_{\varphi\varphi} = sen^2\theta\,[-r.A'/2.e^{-B} + r.B'/2e^{-B} + 1 - e^{-B}] = 8\pi G/c^4 .r^2 sen^2\theta(\rho_o c^2-p)/2$

Llamamos $K=8\pi G/c^4$ para simplificar la notación, y nos concentramos en las 2 primeras ecuaciones:

$e^{A-B}.[A''/2 - A'B'/4 + A'^2/4 + A'/r] = Ke^A(\rho_o c^2+3p)/2$
$-A''/2 + A'B'/4 - A'^2/4 + B'/r = Ke^B(\rho_o c^2-p)/2$

[EC00] $e^{-B}.[A''/2 - A'B'/4 + A'^2/4 + A'/r] = K(\rho_o c^2+3p)/2$
[ECrr] $e^{-B}.[-A''/2 + A'B'/4 - A'^2/4 + B'/r] = K(\rho_o c^2-p)/2$ →sumamos
$e^{-B}.[A'/r + B'/r] = K.(\rho_o c^2+p)$

Operamos un poco la ecuación θθ:

$-r.A'/2.e^{-B} + r.B'/2.e^{-B} + 1 - e^{-B} = K.r^2(\rho_o c^2-p)/2$
$e^{-B}[-r.A'/2. + r.B'/2 - 1] + 1 = K.r^2(\rho_o c^2-p)/2$
$e^{-B}[-A'/(2r) + B'/(2r) - 1/r^2] + 1/r^2 = K(\rho_o c^2-p)/2$
[ECθθ] $e^{-B}[B'/r - A'/r - 2/r^2] + 2/r^2 = K(\rho_o c^2-p)$

Combinamos la sombreada celeste con la sombreada verde, sumando o bien restando según si queremos aislar la presión o la densidad.

$e^{-B}[B'/r - 1/r^2] + 1/r^2 = K.\rho_o c^2$ RADIAL
[ECT] $e^{-B}[A'/r + 1/r^2] - 1/r^2 = K.p$ TEMPORAL

12.3.6: Solución métrica radial:

Bajo la hipótesis de densidad uniforme en todo el volumen, una de las ecuaciones ya está desacoplada de las demás y se puede resolver en forma independiente:

$$e^{-B}[B'/r - 1/r^2] + 1/r^2 = K.\rho_o c^2$$

Es necesario realizar alguna "*conjetura afortunada*", por ejemplo:

$e^{-B} = 1 - C.r^2$, con C=cte que luego se ajustará

Sustituimos y queda:

$$[1 - C.r^2].[B'/r - 1/r^2] + 1/r^2 = K.\rho_o c^2$$
$$B'/r - 1/r^2 - C.r.B' + C + 1/r^2 = K.\rho_o c^2$$
$$B'/r - C.r.B' + C = K.\rho_o c^2$$
$$B'.(1/r - C.r) = K.\rho_o c^2 - C$$
$$B' = [K.\rho_o c^2 - C] / [1/r - C.r]$$
$$B = [K.\rho_o c^2 - C] \int dr/ [1/r - C.r]$$
$$B = [K.\rho_o c^2 - C] \int r.dr/ [1 - C.r^2]$$
$$B = \tfrac{1}{2}. [K.\rho_o c^2 - C] \int 2r.dr/ [1 - C.r^2]$$
$$B = \tfrac{1}{2}. [K.\rho_o c^2 - C] \int dr^2/ [1 - C.r^2]$$
$$B = \tfrac{1}{2}. [K.\rho_o c^2 - C]/C \int d(Cr^2)/ [1 - C.r^2]$$

La integral tiene solución exacta, un logaritmo.

$$B = -\tfrac{1}{2}. [K.\rho_o c^2 - C]/C.\log(1 - C.r^2)$$
$$B = \tfrac{1}{2}. [K.\rho_o c^2 - C]/C.\log[1 / (1 - C.r^2)]$$

Para compatibilidad con la conjetura inicial, la constante resaltada debe valer 1.

$$B = \log[1 / (1 - C.r^2)]$$
$$e^B = 1 / (1 - C.r^2)$$
$$e^{-B} = 1 - C.r^2$$

Despejamos entonces $\tfrac{1}{2}. [K.\rho_o c^2 - C]/C = 1$

$$K.\rho_o c^2 - C = 2C$$
$$K.\rho_o c^2 = 3C$$
$$C = K.\rho_o c^2/3$$

Operamos para lograr una interpretación física de esta "*conjetura afortunada*":

$1 - C.r^2 = 1 - K\rho_o/3.c^2.r^2$
$= 1 - 8\pi G/c^4.\rho_o/3.c^2.r^2$
$= 1 - 8\pi G/c^2.\rho_o/3.r^2$
$= 1 - 8\pi G/c^2.\rho_o/3.r^2$ →partimos 8π
$= 1 - 2G/c^2.4\pi/3\rho_o.r^2$
$= 1 - 2G/c^2.4\pi/3\rho_o.r^2$ →multiplicamos y dividimos por 'r'
$= 1 - 2G/(rc^2).4/3\pi.\rho_o.r^3$
$= 1 - 2G/(rc^2).4/3\pi.\rho_o.r^3$ →reconocemos el volumen limitado por la cáscara de radio r
$= 1 - 2G/(rc^2).Vol(r).\rho_o$
$= 1 - 2G/(rc^2).Vol(r).\rho_o$ → $M(r) = Vol(r).\rho_o$
$= 1 - 2G/(rc^2).M(r)$

$$\beta(r) = 1 / [1 - 2M(r)G/(rc^2)] = 1 / [1 - rs.r^2/R^3]$$

La "conjetura afortunada" es consistente con una función de distorsión métrica radial que depende de la masa total M(r) encerrada en el volumen de radio 'r'.

- Para $r \to 0$ $\beta(r) \to 1$, no hay distorsión métrica en el centro del astro masivo
- Para $r \to R$ $\beta(r) \to 1 / (1 - 2MG/Rc^2) = 1/(1-r_S/R)$

r=R es el valor de la coordenada de Schwarzschild que marca el límite del astro masivo.
En r=R se unen en forma continua las 2 funciones β(r), la externa para r>R y la interna para r<R.

12.3.7: Solución métrica temporal:

Habíamos llegado a: [ECT] $e^{-B}[A'/r + 1/r^2] - 1/r^2 = K.p$ TEMPORAL

El problema al que nos enfrentamos ahora es que la presión varía con la posición, es una función p(r) incógnita. Debemos encontrar la forma de eliminarla.
Retrocedemos un poco hasta volver a las 3 ecuaciones diferenciales de arranque:

[EC00] $e^{-B}.[A''/2 - A'B'/4 + A'^2/4 + A'/r] = K(\rho_o c^2 + 3p)/2$
[ECrr] $e^{-B}.[-A''/2 + A'B'/4 - A'^2/4 + B'/r] = K(\rho_o c^2 - p)/2$
[ECθθ] $e^{-B}[B'/r - A'/r - 2/r^2] + 2/r^2 = K(\rho_o c^2 - p)$

Si multiplicamos 2*[ECrr] y restamos [ECθθ], la función p(r) desaparece junto con su densidad acompañante. Nos quedan acopladas A(r) y B(r), pero B(r) ya no es más una incógnita porque la acabamos de resolver.

$e^{-B}.[-A'' + A'.B'/2 - A'^2/2 + 2B'/r] = e^{-B}.[B'/r - A'/r - 2/r^2] + 2/r^2$ agrupamos B'/r
$e^{-B}.[-A'' + A'.B'/2 - A'^2/2 + B'/r] = e^{-B}.[-A'/r - 2/r^2] + 2/r^2$ ordenamos
$e^{-B}.[A'.(1/r + B'/2) + B'/r + 2/r^2] = e^{-B}.[A'' + A'^2/2] + 2/r^2$ sustituimos $e^{-B} = 1 - Cr^2$
$[1-Cr^2].[A'.(1/r + B'/2) + B'/r + 2/r^2] = (1-Cr^2).[A'' + A'^2/2] + 2/r^2$
$[1-Cr^2].[A'.(1/r + B'/2) + B'/r + 2/r^2] = (1-Cr^2).[A'' + A'^2/2] + 2/r^2$ $B' = 2Cr/(1-Cr^2)$
$[1-Cr^2].[A'/r/(1-Cr^2) + B'/r + 2/r^2] = (1-Cr^2).[A'' + A'^2/2] + 2/r^2$
$[1-Cr^2].[A'/r/(1-Cr^2) + B'/r + 2/r^2] = (1-Cr^2).[A'' + A'^2/2] + 2/r^2$ $B' = 2Cr/(1-Cr^2)$
$[1-Cr^2].[A'/r/(1-Cr^2) + 2/r^2/(1-Cr^2)] = (1-Cr^2).[A'' + A'^2/2] + 2/r^2$
$[1-Cr^2].[A'/r/(1-Cr^2) + 2/r^2/(1-Cr^2)] = (1-Cr^2).[A'' + A'^2/2] + 2/r^2$ simplificamos factor
$[A'/r + 2/r^2] = (1-Cr^2).[A'' + A'^2/2] + 2/r^2$ simplificamos sumando

$$A'/r = (1-Cr^2).[A'' + A'^2/2]$$

Queda finalmente desacoplada la ecuación diferencial para resolver A(r).
Es necesario modificarla un poco para que quede en una forma más amistosa para la resolución:

- o bien de orden 1 con variables separables
- o bien lineal, sin el término cuadrático en la derivada

Primer cambio de variable:
Un primer intento sería volver a la función original α(r) de la métrica, antes del cambio de variable exponencial.

$\alpha(r) = e^{A(r)}$
$\alpha'(r) = A'(r).e^{A(r)}$
$\alpha''(r) = A''(r).e^{A(r)} + A'(r)^2.e^{A(r)}$
$\alpha''(r) = e^{A(r)}.[A''(r). + A'(r)^2]$

Nos queda un factor $A'' + A'^2$, muy parecido pero no exactamente igual a la ecuación diferencial.

El cambio de variables necesario es levemente diferente, con un exponente modulado por una constante.

$f(r) = e^{½.A(r)}$
$f'(r) = A'/2.e^{A/2}$
$f''(r) = A''/2.e^{A/2} + A'^2/4.e^{A/2}$
$f''(r) = e^{A/2}/2.[A'' + A'^2/2]$

Aplicamos este cambio de variable a la ecuación:

$A'/r = (1-Cr^2).[A'' + A'^2/2]$ $f'(r) = A'/2.e^{A/2}$
$2.f'.e^{-A/2}/r = (1-Cr^2).[A'' + A'^2/2]$

$2.f\,'.e^{-A/2}/r = (1-Cr^2).[A''+A'^2/2]$ $\quad f\,''(r) = e^{A/2}/2.[A''+A'^2/2]$

$2.f\,'.e^{-A/2}/r = (1-Cr^2).[2.f\,''.e^{-A/2}]$

$f\,'.e^{-A/2}/r = (1-Cr^2).f\,''.\ e^{-A/2}$ $\quad$ cancelamos

$$f\,'(r) = r.(1-Cr^2).f\,''(r)$$

Segundo cambio de variable:

$u(r)=f\,'(r)$ $\quad du/dr = f\,''(r)$

$u = r.(1-Cr^2).du/dr$

$dr/[r.(1-Cr^2)] = du/u$ $\quad$ sumamos y restamos lo mismo

$(1-Cr^2+Cr^2).dr/[r.(1-Cr^2)] = du/u$

$dr/[1/r + C.r/(1-Cr^2)] = du/u$ $\quad$ integramos los diferenciales exactos

$\log(Q.r) + \int Cr/(1-Cr^2)dr = \log(u)$

$\log(Q.r) - \frac{1}{2}.\log(1-Cr^2) = \log(u)$ $\quad$ logaritmo de una potencia

$\log(Q.r) - \log\sqrt{1-Cr^2} = \log(u)$ $\quad$ logaritmo de un cociente

$\log[Q.r/\sqrt{1-Cr^2}] = \log(u)$ $\quad$ eliminamos logaritmos

$$Q.r/\sqrt{1-Cr^2} = u(r)$$

La función u(r) queda resuelta a menos de una constante de integración 'Q'

Deshacemos segundo cambio de variable:

$u(r) = f\,'(r) \rightarrow f(r)$ se obtiene por integración

$f(r) = P + Q.\int r.dr/\sqrt{1-Cr^2}$ $\quad$ es un diferencial exacto de raíz

$$f(r) = P - Q/C.\sqrt{1-Cr^2}$$

Deshacemos primer cambio de variable:

$f(r) = e^{A/2}$

$f^2(r) = e^{A(r)}$ = es el $\alpha(r)$ que va en la métrica modulando a $(c.dt)^2$

$$e^{A(r)} = [P - Q/C.\sqrt{1-Cr^2}]^2$$

Una condición de borde que hay que imponer es que esta función $\alpha(r)$ sea continua en la frontera del astro masivo r=R. Del lado externo valía $\alpha(R)=1-r_S/R$.

Otra condición de borde surge de anular la presión en esa frontera que separa el vacío p(R)=0.

Debemos todavía calcular la presión a partir de la ecuación.

[ECT] $e^{-B}[A'/r + 1/r^2] - 1/r^2 = K.p(r)$

Aunque ya no quedan ecuaciones diferenciales por resolver, de cualquier manera los cálculos no son simples.

Ejercicio: Demostrar que las soluciones exactas son:

$$p(r) = \rho_o.c^2.[\sqrt{1-r_S.r^2/R^3} - \sqrt{1-r_S/R}\ ]/[3\sqrt{1-r_S/R} - \sqrt{1-r_S.r^2/R^3}\ ]$$

$$e^{A(r)} = \tfrac{1}{4}\ .\ [3\sqrt{1-r_S/R} - \sqrt{1-r_S.r^2/R^3}\ ]^2$$

Formación de un agujero negro:

La función p(r) presenta un máximo en el origen r=0 para cualquier relación entre el radio 'R' y el radio de Schwarzschild r_S, salvo cuando comienza el colapso gravitacional.

La condición de colapso se calcula anulando el denominador de p(r), y resulta ser $R=9/8.r_S$

Límite clásico:

En el límite de campos débiles, $r_S \ll R$, la distorsión métrica se puede simplificar tomando los términos dominantes de los desarrollos de Taylor (solo hasta orden 1 en r_S/R)

$\alpha(r) \approx \frac{1}{4}.\ [\ 3.(1 - \frac{1}{2}.r_S/R) - (1 - \frac{1}{2}\ .r_S.r^2/R^3)]^2$

$\alpha(r) \approx \frac{1}{4}.\ [\ 3 - 3/2.r_S/R - 1 + \frac{1}{2}\ .r_S.r^2/R^3]^2$

$\alpha(r) \approx \frac{1}{4}.\ [\ 2 - 3/2.r_S/R + \frac{1}{2}\ .r_S.r^2/R^3]^2$

$\alpha(r) \approx [\ 1 - 3/4.r_S/R + \frac{1}{4}\ .r_S.r^2/R^3]^2$

$\alpha(r) \approx 1 - 3/2.r_S/R + \frac{1}{2}.r_S.r^2/R^3$

$\alpha(r) \approx 1 + r_S/R.[\ -3/2. + \frac{1}{2}.r^2/R^2]$

$\alpha(r) \approx 1 + 2MG/(Rc^2).[\ -3/2. + \frac{1}{2}.r^2/R^2]$

$$\alpha(r) \approx 1 + 2\Phi_g/c^2, \qquad \text{siendo } \Phi_g(r) \approx MG/R.[\ -3/2. + \tfrac{1}{2}.r^2/R^2]$$

(Mismo resultado que el estimado en la sección 10.2.3 por argumentos clásicos)

Ejercicio: Calcular el perfil de presión p(r) en el límite clásico, comparar con 10.2.3

Recordemos: En 10.4.3, la divergencia covariante del tensor energía-impulso nos daba un balance de fuerzas $p'(r) + (\rho c^2 + p).\alpha'/(2\alpha) = 0$.

Sería interesante verificar que las funciones recién calculadas p(r) y α(r) verifican esta ecuación.

12.4: Solución de Kerr:

A continuación veremos una solución exacta de las ecuaciones de campo de Einstein que modela el vacío en los alrededores de un agujero negro rotatorio o con momento angular.
El punto de partida es la métrica obtenida en forma aproximada en la sección 10.5.1 donde estudiábamos un astro rotatorio.
[EC-12.5.0]
$(dS)^2 = -(c.dt)^2.(1-2.M_0G/r.\gamma_o^2/c^2) \; -4.M_0.G/r.\gamma_o^2\alpha.dt.d\varphi + dr^2 + r^2.d\theta^2 + (r^2.sen^2\theta + 2.M_0.G/r.\gamma_o^2.\alpha^2).d\varphi^2$
$\alpha = w_o.r_o^2.sen^2\theta/c^2$
Se requieren varias correcciones para modificar esta ecuación y llegar a la forma *oficial* de Kerr.

- Perturbación radial
- Aditividad y linealidad
- Coordenadas esferoidales
- Desarrollo multipolar
- Cambio de variable ortogonal en t,φ.
- Ansatz
- Ricci, Riemann y solución final

Trataremos por orden estos temas.

12.4.1: Perturbación radial:

Comenzamos por la corrección más fácil de observar: la radial.
En 10.5.1 considerábamos que a la métrica euclideana alcanzaba con sumarle un término $2.\Phi'/c^2.(dt')^2$
Ignorábamos la perturbación radial y manteníamos intacto el sumando $(dr)^2$ en la métrica $(dS)^2$.
Desde entonces recorrimos mucho camino y vimos que aparecen perturbaciones radiales en las soluciones de Schwarzschild y Reissner-Nordtröm.
Así que como mínimo habría que contemplar en $(dS)^2$ un sumando $(dr)^2.r_S/r$ válido para el régimen de campos débiles, o tal vez uno más ambicioso $(dr)^2.(r_S/r)/(1-r_S/r)$ que aspire a mantener su validez en las cercanías del astro rotatorio.

12.4.2: Aditividad y linealidad:

La ambición enunciada al final del párrafo anterior podemos abandonarla en forma inmediata: las ecuaciones de campo de Einstein NO SON LINEALES. La métrica, que es la incógnita que queremos resolver, perturba los componentes del tensor de energía-impulso y produce un acoplamiento que echa por tierra la linealidad. La aditividad de soluciones y el principio de superposición, tan útiles para la Teoría Electromagnética, no son aplicables en la Gravitación.
Esta aditividad la utilizábamos en 10.5.1 cuando suponíamos que los efectos centrífugos y de Coriolis (atribuibles a las galaxias remotas vistas como rotantes desde el referencial Σ') podían sumarse con los de la masa local giratoria.

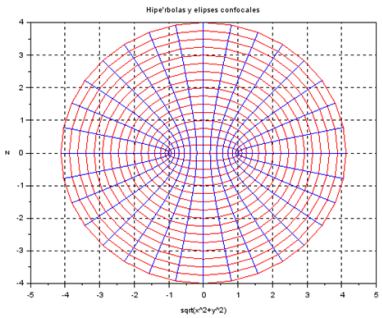
Solo el régimen de los campos débiles permite desacoplar el tensor de energía-impulso de las perturbaciones métricas, y solo en estas condiciones es válida la aditividad y linealidad.
Conclusión → cualquier argumento de aditividad solo nos va a servir para campos débiles (lo que no deja de tener utilidad) pero no es sostenible para este capítulo 12 llamado "Soluciones Exactas".
En la búsqueda de nuestra solución exacta de Kerr, veremos que las *perturbaciones multiplicativas* dan mejor resultado que las aditivas.

12.4.3: Coordenadas esferoidales:

Cuando un astro entra en rotación, los efectos centrífugos son más intensos en el Ecuador que en los polos. El astro tiende a adquirir una forma elipsoidal, ya sea por estiramiento elástico o por desprendimiento de porciones que no están en equilibrio. La forma ideal de equilibrio tiene superficies equipotenciales esferoidales, que se apartan más de la esfera ideal cuanto mayor es la velocidad angular.

Las coordenadas esféricas no son las que mejor se adaptan para problemas con esta geometría, es conveniente pasar a las coordenadas elipsoidales presentadas por primera vez en 8.1.7.
La métrica de partida, antes de considerar las perturbaciones gravitatorias, pasa a ser:

$$(dS)^2 = \rho^2/(r'^2+f^2)(dr')^2 + \rho^2.(d\theta')^2 + (r'^2+f^2).sen^2\theta'.(d\varphi)^2$$
$$\rho^2 = r'^2 + f^2.cos^2\theta'$$



f = es un parámetro que se asocia con la excentricidad de las superficies elipsoidales y está relacionado con la intensidad de giro.

En las publicaciones sobre Relatividad es usual renombrar f→a.
También es usual renombrar θ'→θ, r'→r, para evitar llenar de primas las ecuaciones.
Es oportuno advertir que estas coordenadas renombradas (θ,r) no son las esféricas; solamente tienden a coincidir con ellas en las zonas remotas r≫a.
Nuestra métrica de arranque queda:

$$(dS)^2 = -(c.dt)^2 + \rho^2/(r^2+a^2)(dr)^2 + \rho^2.(d\theta)^2 + (r^2+a^2).sen^2\theta.(d\varphi)^2$$
$$\rho^2 = r^2 + a^2.cos^2\theta$$

12.4.4: Desarrollo multipolar:

En la búsqueda histórica de soluciones exactas a las ecuaciones de Einstein, la primera que surgió fue la de Schwarzschild que se ajusta a la simetría esférica.
Pensando en una analogía electromagnética, esto tiene una relación con el término principal 1/r del desarrollo multipolar de los potenciales. Los términos multipolares del Electromagnetismo corresponden a fuentes ideales puntuales: carga puntual, dipolo puntual…etc. Las distribuciones reales de carga, con tamaño finito 'R_a', solo pueden aproximarse en forma multipolar si nos alejamos lo suficiente $r \gg R_a$ para que las fuentes se vean esencialmente como puntuales.

En la Gravitación, la distribución de masas más simple es una masa concentrada en un punto, que correspondería a un agujero negro resultante de un colapso gravitacional. En algún momento previo a su colapso, su tamaño cayó por debajo del radio de Schwarzschild y se cumplió la condición $R_a<r_s$.
Luego del colapso, R_a se achicó indefinidamente hasta llegar a $R_a=0$.
A pesar de lo *angustiante* que puede resultar la idea de una masa astronómica concentrada en un punto, desde el punto de vista matemático hay una ventaja innegable: *la condición $r \gg R_a$ se cumple para todos los 'r' finitos* porque $R_a=0$.
La siguiente distribución de masas, en orden de complejidad, es un agujero negro rotatorio.
La no-linealidad, ya advertida en 12.5.2, tiene como consecuencia que no fue posible hasta la fecha encontrar una solución exacta "limpia" que consista en un único término del desarrollo multipolar con potencias 1/r o polinomios cosθ senθ. Y probablemente nunca se encuentre tal solución, porque al ser la Gravitación una disciplina no lineal no existen las sumas de términos multipolares.
Pero sí se encontró una solución exacta que depende solamente de 2 parámetros:

- la masa total 'M'
- el momento angular 'J'

Esta solución, llamada solución de Kerr, describe en forma exacta la métrica en los alrededores de un agujero negro rotatorio. Y vale en forma aproximada para cualquier distribución de tamaño finito, si nos alejamos lo suficiente como para que la distribución se vea como un punto.

12.4.5: Cambio de variables ortogonal t,φ:

En el capítulo 10.5.1 proponíamos el siguiente cambio de variable angular:

$dt = \gamma_o.(dt' + \alpha.d\varphi')$ $\qquad dt' = \gamma_o.(dt - \alpha.d\varphi)$

$d\varphi = \gamma_o.(d\varphi' + w_o.dt')$ $\qquad d\varphi' = \gamma_o.(d\varphi - w_o.dt)$

Elegíamos un único radio $r=r_o$ para alinear esta transformación con la conocida de Lorentz.
De acuerdo con cálculos realizados en aquella sección, encontrábamos que r_o era del orden de magnitud del radio R_o de la distribución másica.

Ahora estamos estudiando una distribución de masas colapsada en un punto. Ya no tiene significado este radio 'r_o' en el cual realizábamos la calibración, y podemos aventurarnos a calibrar la métrica para todos los radios 'r'. En todos los puntos del espacio este cambio de variables angular va a tener una propiedad lorentziana: la ausencia de término cruzado dt.dφ.
Existen varios grados de libertad para considerar transformaciones más amplias, en este capítulo nos vamos a restringir a la familia de transformaciones de la forma:

$dt' = dt - \alpha.d\varphi$

$d\varphi' = d\varphi - \beta.dt$

Queremos conservar la ortogonalidad en las coordenadas elipsoidales, lo que implica que la parte métrica propuesta en 12.5.3 $(r^2+a^2)sen^2\theta.d\varphi^2 - c^2.dt^2$
no debe adquirir ningún término cruzado dt.dφ luego del cambio de variable.

Invertimos las ecuaciones resaltadas en verde.

$dt' + \alpha.d\varphi' = dt.(1-\alpha\beta)$

$d\varphi' + \beta.dt' = d\varphi.(1-\alpha\beta)$

Operamos:

$(r^2+a^2)sen^2\theta.d\varphi^2 = (r^2+a^2)sen^2\theta/(1-\alpha\beta)^2.[d\varphi' + \beta.dt']^2$

$= (r^2+a^2)sen^2\theta/(1-\alpha\beta)^2.[d\varphi'^2 + 2.\beta.d\varphi'.dt' + \beta^2.dt'^2]$

$c^2.dt^2 = c^2/(1-\alpha\beta)^2.[dt' + \alpha.d\varphi']^2$

$= c^2/(1-\alpha\beta)^2.[dt'^2 + 2.\alpha.dt'.d\varphi' + \alpha^2.d\varphi'^2]$

Al restar $(r^2+a^2)sen^2\theta.d\varphi^2 - c^2.dt^2$, el término mixto desaparece si se cumple:

$(r^2+a^2)sen^2\theta.2.\beta.d\varphi'.dt' = c^2.2.\alpha.dt'.d\varphi'$

$(r^2+a^2)sen^2\theta.\beta = c^2.\alpha$

$\alpha = \beta.(r^2+a^2)sen^2\theta/c^2$ es similar a 10.5.1

El término temporal en dt'^2 queda

$temporal = dt'^2/(1-\alpha\beta)^2.[\beta^2.(r^2+a^2)sen^2\theta - c^2]$

$temporal = -c^2dt'^2/(1-\alpha\beta)^2.[1 - \beta^2/c^2.(r^2+a^2)sen^2\theta]$

$temporal = -c^2dt'^2/(1-\alpha\beta)^2.[1 - \beta^2/c^2.(r^2+a^2)sen^2\theta]$ →sustituimos α vs. β

$temporal = -c^2dt'^2/(1-\beta.(r^2+a^2)sen^2\theta/c^2.\beta)^2.[1 - \beta^2/c^2.(r^2+a^2)sen^2\theta]$

$temporal = -c^2dt'^2/(1-\beta^2.(r^2+a^2)sen^2\theta/c^2)^2.[1 - \beta^2/c^2.(r^2+a^2)sen^2\theta]$ →simplificamos mismo factor

$temporal = -c^2dt'^2/(1-\beta^2.(r^2+a^2)sen^2\theta/c^2)$

Por otro lado, la parte radial en coordenadas esferoidales se mantiene como:

$radial = (dr)^2.(r^2+a^2.cos^2\theta)/(r^2+a^2)$

$radial = (dr)^2.(r^2 + a^2 - a^2.sen^2\theta)/(r^2+a^2)$

radial = $(dr)^2.(1–a^2/(r^2+a^2).sen^2\theta)$

Para simplificar los cálculos de la siguiente sección, imponemos una restricción adicional a los grados de libertad α,β. Queremos que la distorsión temporal sea inversa a la radial, para lograr el máximo parecido con la métrica de Schwarzschild.
La condición a cumplir es:

$(1–a^2/(r^2+a^2).sen^2\theta) = (1–\beta^2.(r^2+a^2)sen^2\theta/c^2)$
$1–a^2/(r^2+a^2).sen^2\theta = 1–\beta^2.(r^2+a^2)sen^2\theta/c^2$
$a^2/(r^2+a^2) = \beta^2.(r^2+a^2)/c^2$
$\beta^2=c^2.a^2/(r^2+a^2)^2$
$\beta=c.a/(r^2+a^2)$

Despejamos α

$\alpha = \beta.(r^2+a^2)sen^2\theta/c^2$
$\alpha = c.a/(r^2+a^2).(r^2+a^2)sen^2\theta/c^2$
$\alpha = a.sen^2\theta/c$

Tenemos resuelto:

$\alpha = a.sen^2\theta/c$
$\beta=c.a/(r^2+a^2)$

El determinante del cambio de variables es

$1–\alpha\beta=1– a.sen^2\theta/c.c.a/(r^2+a^2)$
$1–\alpha\beta=1– a^2.sen^2\theta/(r^2+a^2)$

Falta entonces calcular la parte angular de la métrica

angular = $d\varphi'^2/(1-\alpha\beta)^2.[(r^2+a^2)sen^2\theta –\alpha^2.c^2]$
angular = $d\varphi'^2/(1-\alpha\beta)^2.[(r^2+a^2)sen^2\theta –a^2.sen^4\theta]$
angular = $d\varphi'^2.sen^2\theta/(1-\alpha\beta)^2.[(r^2+a^2) –a^2.sen^2\theta]$
angular = $d\varphi'^2.sen^2\theta.(r^2+a^2)/(1-\alpha\beta)^2.[1 –a^2/(r^2+a^2).sen^2\theta]$ →sustituimos $(1-\alpha\beta)$
angular = $d\varphi'^2.sen^2\theta.(r^2+a^2)/[1 –a^2/(r^2+a^2).sen^2\theta]^2.[1 –a^2/(r^2+a^2).sen^2\theta]$ →simplificamos
angular = $d\varphi'^2.sen^2\theta.(r^2+a^2)/[1–a^2/(r^2+a^2).sen^2\theta]$

La métrica de arranque de Minkowski, en coordenadas elipsoidales y con los cambios de variable propuestos, adquiere la forma:

$(dS)^2 = –(c.dt)^2 + \rho^2/(r^2+a^2)(dr)^2 + \rho^2.(d\theta)^2 + (r^2+a^2).sen^2\theta.(d\varphi)^2$
$(dS)^2 = –(c.dt')^2.[1–a^2/(r^2+a^2).sen^2\theta]$ //temporal
$+(dr)^2/[1–a^2/(r^2+a^2).sen^2\theta]$ //radial
$+ \rho^2.(d\theta)^2$
$+ (r^2+a^2).sen^2\theta.(d\varphi')^2/[1–a^2/(r^2+a^2).sen^2\theta]$ //angular

siendo $c.dt' = c.dt –a.sen^2\theta.d\varphi$ $d\varphi' = d\varphi –a/(r^2+a^2).c.dt$

12.4.6: Ansatz:

La sección anterior concluye con una métrica elipsoidal de partida, para el caso límite de ausencia de materia. Cuando empezamos finalmente a considerar las distorsiones causadas por la materia rotativa, las coordenadas elipsoidales pasan a llamarse coordenadas de Boyer-Lindquist.

El agujero negro esférico de Schwarzschild tenía una discontinuidad en r=0.
Ahora veremos que el agujero negro rotatorio de Kerr también presenta una discontinuidad en r=0, solo que este nuevo 'r' es la coordenada esferoidal en lugar de la esférica.

El lugar geométrico de los puntos r=0 es un disco de radio 'a', lo que de alguna manera identifica al parámetro 'a' con el "tamaño" del agujero negro de Kerr.
El cambio de variable $d\varphi' = d\varphi - a/(r^2+a^2).c.dt$ admite entonces la siguiente interpretación:
Es de la forma $d\varphi'=d\varphi-w_o.t$, siendo $w_o=a.c/(r^2+a^2)$.
w_o vendría a ser la velocidad angular a la que tenemos que rotar para desprendernos de la mayor parte de los efectos de la rotación y poder ver "*lo más quieta posible*" a la masa rotante.
Si nos ubicamos a distancia r=a, tenemos $w_o= a.c/(a^2+a^2) \rightarrow w_o=c/(2a)$
La velocidad de desplazamiento es $v_o^2=(r^2+a^2).w_o^2$

$v_o^2=(r^2+a^2).w_o^2$

$v_o^2=(2a^2).c^2/(4a^2)$

$v_o^2=c^2/2$

Es una velocidad altamente relativista, casi lumínica. El colapso gravitacional de un astro rotante involucra densidades del orden de la densidad crítica de Schwarzschild, o materia moviéndose a la velocidad de la luz, o una combinación de ambos efectos.

El "*Ansatz*" o conjetura de solución consiste en suponer perturbaciones multiplicativas.

temporal $\rightarrow$temporal.$e^{A(r,\theta)}$

radial$\rightarrow$radial.$e^{B(r,\theta)}$

angular$\rightarrow$angular.$e^{C(r,\theta)}$.

En el límite en que la rotación desaparece, a$\rightarrow$0. Las coordenadas de Boyer-Lindquist se convierten en las de Schwarzschild y las funciones pasan a ser $B(r,\theta)= -A(r,\theta)$ igual que en el caso Schwarzschild.
En el otro extremo en que M$\rightarrow$0, todas las funciones perturbativas tienden a la unidad A=B=C=0 y recuperamos la métrica plana de Minkowski en coordenadas esferoidales.

12.4.7: Ricci, Riemann y solución final:

No vamos a calcular explícitamente los tensores de Riemann ni de Ricci, ni las ecuaciones diferenciales. Presentamos la solución final y proponemos comprobar su validez con apoyo de algún paquete de software como Maxima.

$$(dS)^2= -\Delta/\rho^2.(c.dt-a.sen^2\theta.d\varphi)^2+\rho^2/\Delta.dr^2+\rho^2.d\theta^2+sen^2\theta/\rho^2.[(r^2+a^2)d\varphi-a.c.dt]^2$$

$\rho^2 = r^2 + a^2. \cos^2\theta$

$\Delta = r^2 - r_S.r + a^2$

$r_S=2.M.G/c^2$

r, θ, φ son coordenadas esferoidales, coinciden con las esféricas solo en el límite r$\rightarrow\infty$.
El parámetro 'a' tiene unidades de longitud, corresponde a la distancia foco-centro de los elipsoides de la geometría. Está relacionado con la velocidad de rotación y con el momento angular.

12.5: Túnel de espacio-tiempo:

La métrica con simetría esférica admite distintas formulaciones

- coordenadas Schwarzschild: $(dS)^2 = -(c.dt)^2.(1-r_S/r) + dr^2/(1-r_S/r) + r^2.d\Omega^2$
- coordenadas isotrópicas 'ρ': $(dS)^2 = -(c.dt)^2.[1-r_S/4\rho]^2/[1+r_S/4\rho]^2+[1+(r_S/4\rho)]^4.[d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2]$

El cambio de variables que relaciona ambas coordenadas es:

$$r(\rho) = \rho + r_S/2 + (r_S/4)^2/\rho$$

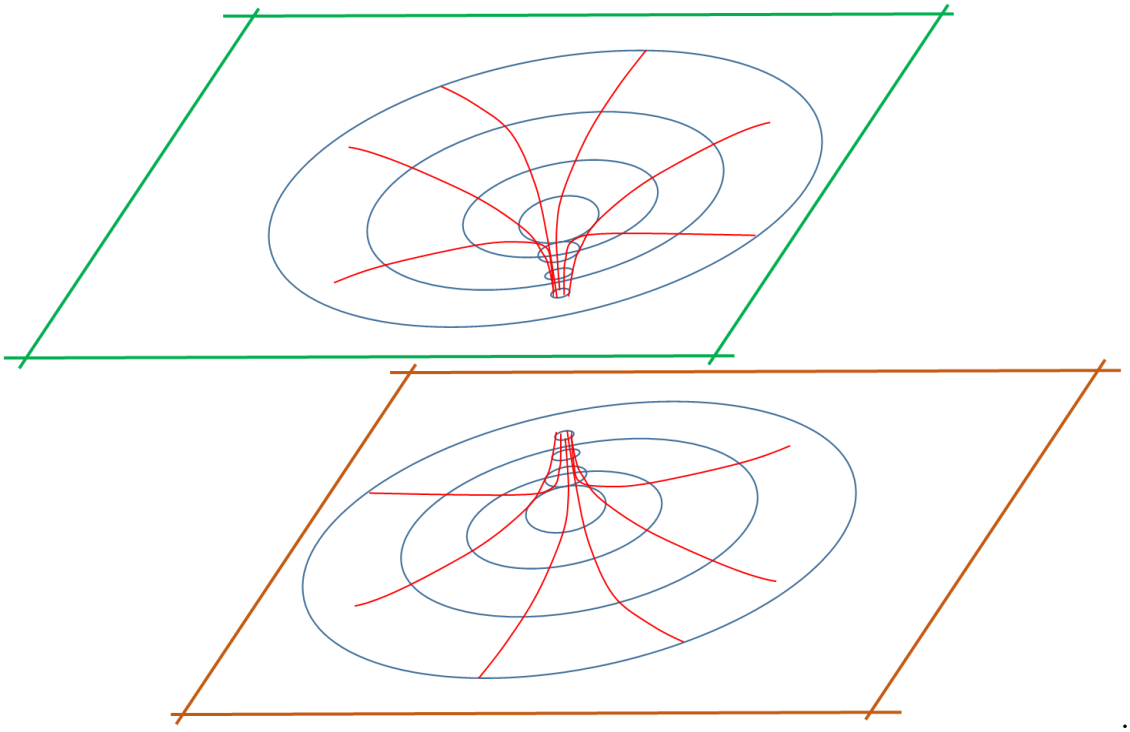
La fórmula inversa ρ(r) implica resolver una ecuación de segundo grado.

$$r.\ \rho = \rho^2 + \rho.r_S/2 + (r_S/4)^2$$

$$\rho^2 + \rho.(r_S/2 - r) + (r_S/4)^2 = 0$$

Se da la particularidad matemática de que existen 2 valores distintos ρ_{sup} y ρ_{inf} para un mismo 'r', relacionados a través de la fórmula de coeficientes y raíces de un polinomio: $\rho_{sup}.\rho_{inf} = (r_S/4)^2$.

La solución ρ_{sup} es la que usamos para describir nuestro espacio, pero podríamos formular la hipótesis interpretativa de que la otra solución ρ_{inf} también tiene significado físico y corresponde a otro espacio que solo se distinguiría en una dimensión adicional.



Explicación de la figura:

Se toman "*rebanadas*" de espaciotiempo con t=cte y θ=π/2=cte.

Se grafican ρ, φ y la 5ta dimensión 'w'.

Las curvas rojas son lugares geométricos φ=cte.

Las cuvas azules representan lugares geométricos ρ=cte.

El hiperespacio verde corresponde a las soluciones $+\sqrt{\ }$ de la ecuación de 2do grado $\rho > r_S/4$.

El hiperespacio marrón corresponde a las soluciones $-\sqrt{\ }$ de la ecuación de 2do grado $\rho < r_S/4$.

La "*garganta*" que une la rebanada superior con la inferior se angosta y alcanza un mínimo en $\rho = r_S/4$.

Esta propuesta de túnel o puente, tal como la estamos exponiendo, no pasa de una construcción mental. Para que califique como una "solución exacta" de las ecuaciones de campo es necesario encontrar una configuración de materia y energía que sea compatible con ella.

Los estudios actuales muestran que la masa puntual 'M' de la solución de Schwarzschild es una configuración *destructiva* en el sentido de que afecta la integridad de todo aquello que cruce el horizonte de sucesos. Si estos túneles son viables, la configuración de energía que los crea deberá ser diferente. Posiblemente deba guardar una razonable simetría esférica para que vista "desde lejos" se parezca a un agujero negro de Schwarzschild.

12.6 Otras soluciones:

KERR-NEWMANN:
Modela una distribución de masa con momento angular rotatorio y carga eléctrica.
En su límite colapsado (agujero negro) presenta regiones y circunstancias que podrían permitir la formación de una singularidad llamada "*naked*", lo que supondría un desafío a nuestras nociones de causalidad.
https://es.wikipedia.org/wiki/Agujero_negro_de_Kerr-Newman%20
https://es.wikipedia.org/wiki/Singularidad_desnuda

METRICA FLRW: Se conoce con esta sigla a un modelo de métrica cosmológica en el que trabajaron los autores Friedmann, Lemaitre, Robertson y Walker. La idea general está basada en algunos de los principios que mostramos en la Introducción a la Cosmología del capítulo 11. Se amplía el abanico de soluciones para contemplar curvatura espacial positiva o negativa, presiones en el tensor de energía-impulso (para modelar la materia cósmica como un fluido más que un polvo) y energía de vacío (constante cosmológica),

UNIVERSO ESTÁTICO DE EINSTEIN: Es un caso particular de las soluciones FLRW donde los factores de escala están estáticos: $a(t)=cte$, $a'(t)=0$, $a''(t)=0$. El Universo se mantiene a sí mismo sin colapsar gracias a la presencia de un término llamado "cosmológico" basado en una constante Λ, que puede interpretarse como una repulsión universal presente en todas partes (incluso en el vacío) y que contra-resta la gravedad. Nombramos a esta solución porque tuvo su importancia histórica. Actualmente está descartada como alternativa debido a que se puede demostrar que es inestable: si la densidad de materia ρ y la constante cosmológica Λ se alejan levemente de su valor de equilibrio, este modelo de Universo evoluciona hacia un colapso o hacia una expansión eterna.

ONDAS-GRAVITACIONALES:
Son campos gravitacionales generados por fenómenos astrofísicos muy intensos como la explosión de supernovas, choques de agujeros negros o choques de estrellas de neutrones. Constituyen una perturbación métrica que varía en el espacio y en el tiempo y se propaga a la velocidad de la luz.

13. TEMAS ADICIONALES.

Varios temas quedan afuera de esta primera versión del documento, en algunos casos por falta de espacio y en otros casos por considerar que la complejidad supera a los conceptos aquí presentados y merece un estudio adicional aparte. Los nombramos de manera rápida por si sirven para despertar la curiosidad de lecturas adicionales.

13.1: Paradojas de la Relatividad Especial:

En general estas paradojas no son tales, admiten una explicación lógica basada en argumentos de líneas de simultaneidad, conos de luz, transformación de Lorentz…etc. Pero pueden darnos un buen dolor de cabeza durante un tiempo considerable ☺

13.1.1: Paradoja de los gemelos:

Dos gemelos de idéntico aspecto se separan: uno de ellos 'T' permanece en la Tierra y el otro 'V' se embarca en viajes espaciales a velocidades relativistas. Años después se reúnen de nuevo en la Tierra.
De acuerdo con la dilatación de tiempos relativista, 'T' experimenta mayor tiempo propio y envejece más. Sin embargo, si invertimos los roles del razonamiento, 'V' desde su referencial ve que es el hermano quien se mueve, ¿cómo puede ser que envejezca más si se está moviendo tan rápido?

13.1.2: Paradoja de la jabalina y el granero:

Una pértiga de 2 metros viaja a velocidad relativista próxima a 'c' tal que su longitud contraída por efecto Lorentz es de 0.8 metros, lo que significa que podría caber momentáneamente en un granero de 1 metro de ancho.
Desde el referencial de la jabalina, es el granero quien se mueve y su ancho contraído pasa a ser 0.4m, ¿cómo es posible que pueda albergar a la jabalina?
Si se cierran las puertas del granero (por un mecanismo imaginario de reacción instantánea), ¿podrá "atraparse" a la jabalina?

13.1.3: Paradoja de la nave espacial de Bell:

Dos naves espaciales, unidas por un hilo filo, son sometidas a una aceleración exactamente igual.
¿Cómo se manifiesta el fenómeno de contracción de longitudes al analizar la aceleración desde distintas referencias? ¿Se rompe el hilo que las une?

13.1.4: Rígido de Born:

En la Física Clásica, un objeto se modela como *rígido* si todas sus partículas constituyentes se mueven a la misma velocidad en caso de movimiento lineal. Si hay aceleración lineal, la velocidad de cada partícula variaría en el tiempo pero los cortes con t=cte mostrarían un perfil de velocidades homogéneo para cada punto. Si hay de por medio una rotación, las distintas partes pueden tener diferente velocidad pero se mueven manteniendo constante la distancia entre ellas.
La Teoría de la Relatividad sacude estos conceptos porque las medidas de distancia pasan a depender del punto de referencia, y la simultaneidad también se vuelve relativa.
También debe revisarse el concepto de transmisión de información entre los diferentes puntos que forman el sólido. Pensemos en el ejemplo de una bola de billar que es impulsada en su extremo izquierdo por el taco de billar. Si el extremo derecho de la bola viaja a la misma velocidad que el izquierdo, ¿cómo "*se enteró*" del impacto? ¿Pudo existir una transmisión de información a velocidad infinita entre el extremo izquierdo y el derecho? La Teoría de la Relatividad cuestiona estas transmisiones instantáneas porque pueden producirse paradojas de causalidad si algún fenómeno viaja más rápido que la luz.

13.1.5: Paradoja de Ehrenfest:

Un cilindro rígido de radio 'R' rota en forma uniforme con velocidad angular 'w'.
¿Un observador solidario mide su circunferencia como $2\pi.R$?
¿O mide una longitud afectada por contracción de Lorentz?

13.2: Cosmología:

La Cosmología tiene que ver con el estudio del Universo en su conjunto.
La escala espacial de análisis se amplía para ir más allá de nuestro planeta, del sistema solar, de la galaxia en la que estamos ubicados, más allá de las restantes galaxias…
Por otro lado: ciertas estrellas que vemos en el cielo en realidad dejaron de existir hace miles de años, y lo que nos llega es su luz emitida. Lo que implica que la escala temporal también se amplía en esta disciplina, y el estudio pasa a contemplar tiempos muy remotos en el pasado y en el futuro.

13.2.1: Estabilidad de la gravitación:

Las masas tienden a atraerse unas a otras, y esto crea preocupación a escala cosmológica por la posible inestabilidad a largo plazo del Universo.

13.2.2: Constante cosmológica de Einstein 'Λ':

En la ecuación de campo de Einstein se puede sumar el tensor métrico escalado por un término constante Λ.
$R^{\alpha\beta} - R/2.g^{\alpha\beta} + \Lambda.g^{\alpha\beta} = 8\pi G/c^4.T^{\alpha\beta}$
Este sumando no afecta la conservación de la energía porque no aporta divergencia covariante $\nabla_\alpha(\Lambda.g^{\alpha\beta})=0$, ninguno de los argumentos manejados en este trabajo puede excluir la posibilidad de que las ecuaciones tengan realmente esta modificación.
Simplemente comentamos que en "pequeña escala" la suposición $\Lambda=0$ no produce ningún conflicto con los resultados de observaciones experimentales. La contemplación de un posible valor $\Lambda\neq0$ recién cobra importancia a "gran escala", cuando se estudian galaxias remotas o tiempos muy lejanos relacionados con el pasado y/o el futuro del Universo. La influencia de un Λ positivo sería la de crear una especie de repulsión universal que se opondría a la atracción gravitatoria habitual.
Esta constante Λ podría estar relacionada con algo llamado "energía oscura" (en inglés *"dark energy"*), responsable de la expansión acelerada del Universo. Porque eso es lo que revelan las mediciones cosmológicas de la actualidad (principios del siglo XXI): las galaxias no solo se alejan unas de otras, además su velocidad de separación parece estar aumentando.

13.2.3: Principio de Mach:

Hay muchas formulaciones alternativas para enunciar este principio. Según la cita de Wikipedia, la inercia de cualquier sistema es resultado de su interacción con todo el resto del Universo. En otras palabras, cada partícula del Universo ejerce su influencia sobre todas las demás.
https://es.wikipedia.org/wiki/Principio_de_Mach
En el marco de las teorías gravitatorias, esto lleva a reflexionar sobre una serie de fenómenos.
Por ejemplo, ponemos a rotar un cubo lleno de agua y su superficie adquiere la forma de un arco de parábola por efecto centrífugo. Sin embargo, ¿tendría sentido este experimento si el Universo estuviera vacío de toda otra materia? En tal caso, ¿respecto a quién estaríamos rotando? ¿Percibiríamos las mismas fuerzas que deforman la superficie del cubo?
Según este principio, las estrellas y galaxias remotas podrían ser las responsables de las fuerzas centrífugas y de Coriolis, debido a que se perciben como móviles en el referencial solidario al giro.
Podemos aplicar los temas estudiados en este trabajo para calcular dichas fuerzas en función de los potenciales gravitatorios y gravitomagnéticos del Universo giratorio. Eso implicaría hacer algunas hipótesis sobre los contenidos de materia en zonas distantes.

13.2.4: Big Bang, Universo en Expansión:

Se llama "*Big Bang*" o "*Gran Explosión*" al fenómeno que supuestamente ocurrió en nuestro Universo en un pasado remoto (estimado 13800 millones de años según la fuente https://es.wikipedia.org/wiki/Big_Bang).
De acuerdo con esta Teoría, toda la materia del Universo actual llegó a estar concentrada en un único punto desde el cual salió disparada en todas las direcciones.
Desde entonces sigue expandiéndose en forma continua.

13.2.5: Ondas gravitacionales:

En el Electromagnetismo encontramos que una familia de soluciones de vacío ($\rho=0$ $\vec{J}=0$) son las ondas electromagnéticas que se propagan a la velocidad de la luz 'c'. Su origen son configuraciones de cargas y corrientes oscilantes en el tiempo.
Las ecuaciones de campo de la Relatividad también admiten como soluciones de vacío una familia de funciones descritas como "ondas gravitacionales". Según la Teoría de la Relatividad, el origen de estas perturbaciones de espaciotiempo serían ciertos fenómenos gravitacionales intensos como explosiones, choques de cuerpos masivos, colapsos, rotaciones…etc.
Hay proyectos astronómicos dedicados a la detección y el análisis de este tipo de ondas, con la idea de obtener de esta manera información sobre regiones remotas del Universo.
Invitamos a consultar las fuentes https://es.wikipedia.org/wiki/LIGO
LIGO es una sigla en inglés que significa *Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory*, observatorio de ondas gravitacionales por interferometría láser.

13.3: Fronteras del mundo:

13.3.1: Universos adentro de un punto:

La solución de Agujero Negro de Schwarzschild da a entender que la masa 'M' de un astro colapsa en un punto r=0 cuando la densidad supera cierto valor crítico.
Por otro lado, la coordenada 'r' de Schwarzschild no mide exactamente distancia, y las discordancias se vuelven más extremas a medida que la coordenada 'r' disminuye.
Podrían elaborarse ciertos modelos interpretativos según los cuales la masa 'M' original del agujero negro, y todas las restantes masas *tragadas* por la acción gravitatoria del agujero, fueron a parar a otro Universo diferente. Otro Universo que en nuestras coordenadas se condensa en un único valor r=0.

13.3.2: Efectos cuánticos:

Los fenómenos gravitacionales intensos llevan la materia a una escala de longitudes y densidades donde el estudio no puede considerarse completo si no se incluyen aspectos cuánticos.
A la fecha de redacción de este artículo se considera importante la búsqueda de modelos físicos que armonicen la Física Cuántica con la Gravedad.

13.3.3: Conquista del espacio:

Las estrellas más cercanas que conocemos están a un par de años luz, lo que implica que es necesario un gran avance tecnológico para desarrollar viajes a velocidades tales que hagan viable la exploración.
Aunque se logre tecnología para viajar tan rápido, tendríamos el problema del efecto relativista de dilatación temporal. Por más que un viajero logre recorrer 100 años luz en un tiempo propio humano, la teoría actual predice que no puede regresar a la Tierra antes de 100 años terrestres.

13.3.4: Viajes en el tiempo:

Si el tiempo es una cuarta dimensión, ¿podemos desplazarnos a través de él como nos desplazamos por las coordenadas espaciales?
La dilatación temporal de la Relatividad Especial es compatible con viajes al futuro, pero ¿qué tan viables pueden ser los viajes al pasado?
En la Relatividad General pueden encontrarse geometrías que permitan la existencia de *curvas cerradas temporales* (*closed timelike curves*). Trayectorias que corresponden a un tiempo propio real positivo $d\tau>0$ y que regresan al mismo punto del espaciotiempo del cual partieron. Un estudio de las métricas con estas características particulares suele revelar posibles violaciones a alguna condición de energía o de entropía, lo que representa un desafío para la Física.

13.3.5: Teletransporte:

El teletransporte podría definirse de manera informal como: hacer desaparecer un objeto físico de un lugar de manera "instantánea" y hacerlo reaparecer en otro sitio remoto sin pasar por los puntos intermedios.
Desde el punto de vista de la Teoría de la Relatividad, teniendo en cuenta el límite de la velocidad de la luz, no es imprescindible el transporte instantáneo; caería dentro de la clasificación de *teletransporte* cualquier proceso que involucre transmisión de información o de objetos a velocidades superlumínicas.
Los temas estudiados en Relatividad invitan a hacer volar la mente por ideas futuristas o de ciencia ficción. Imaginamos que cierta distribución de masa-energía de suficiente intensidad logra *doblar* el espacio en una quinta dimensión y se crean 2 caminos alternativos para ir de un punto A hacia B:

- El camino largo a través del espacio común
- El *túnel o atajo* a través del trayecto punteado. En obras de ciencia ficción se sugiere que estos trayectos alternativos podrían transitar a través del *hiperespacio*. Los objetos o seres viajeros desaparecerían del espacio visible por 'A', circularían por una 5ta dimensión no percibible por los demás habitantes del Universo cuadridimensional, y reaparecerían por 'B' en un tiempo que parecería violar los límites físicos.
- En nuestra teoría de la gravitación *real* deberíamos buscar tecnologías que puedan acceder a esa hipotética quinta dimensión. O soluciones que involucren una porción de "espacio común" en el trayecto punteado entre A y B, que permita el tránsito de materia y/o de señales.

Una de las estructuras candidatas a cumplir con este requerimiento se llama *agujero de gusano* (en ingés "*wormhole*"). Ya que el espacio y el tiempo están unidos formando un espaciotiempo, se estudia la posibilidad de que estas métricas permitan también viajar en el tiempo.

13.3.6: Antigravedad, masa negativa:

La Gravedad y el Electromagnetismo comparten muchos aspectos físicos y matemáticos.
Así como hay cargas positivas y cargas negativas, ¿no podría ocurrir algo similar con las masas?
¿Qué efectos inerciales y gravitatorios podría tener una masa negativa si existiera?
¿Crearía gravedad repulsiva en vez de atractiva?
Si analizamos los invariantes relativistas estudiados en este trabajo, observamos:

- $dS^2=dEP^2 -(c.dt)^2$ admite los 2 signos, según si pesan más los desplazamientos espaciales o los temporales.
- $Y = 2.(E^2/c^2–B^2)$ también admite los 2 signos, según si pesan más los campos eléctricos o los magnéticos.
- $T=3p -\rho_o.c^2$

La materia clásica en régimen de baja energía tiene $T<0$. Una región con masa negativa presentaría $T>0$. También podría alcanzarse ese efecto de $T>0$ si la presión adquiere suficiente intensidad.

13.4: Otras lecturas:

- Astrofísica
- Etapas de vida de una estrella
- Colapso gravitacional
- Formación de agujeros negros
- Materia oscura, energía oscura
- Teoría cuántica de campos
- Gravedad cuántica, gravitones
- Teoría de cuerdas y supercuerdas
- Teoría Unificada o Teoría del Todo

14. AUTORES:

Ampere	André-Marie Ampère
Bianchi	Luigi Bianchi
Binet	Jacques Phillippe Marie Binet
Biot	Jean Baptiste Biot
Boltzmann	Ludwig Eduard Boltzmann
Bradley	James Bradley
Boyer	Robert H. Boyer
Christoffel	Bruno Elwin Christoffel
Coriolis	Gaspard Gustave Coriolis
Coulomb	Charles Augustin de Coulomb
D'Alembert	Jean le Rond d'Alembert
de Donder	Théophile de Donder
Descartes	Rene Descartes
Dirac	Paul Adrien Dirac
Doppler	Christian Doppler
Eddington	Arthur Stanley Eddington
Ehrenfest	Paul Ehrenfest
Einstein	Albert Einstein
Euclides	
Euler	Leonard Euler
Faraday	Michael Faraday
Fermat	Pierre de Fermat
Feynman	Richard Feynman
Finkelstein	David Finkelstein
Fitzgerald	George Francis Fitzgerald
Fizeau	Hippolyte Fizeau
Fresnel	Augustin-Jean Fresnel
Galileo	Galileo Galilei
Gauss	Karl Friedrich Gauss
Grossmann	Marcel Grossmann
Gullstrand	Allvar Gullstrand
Hamilton	William Rowan Hamilton
Hawking	Stephen Hawking
Heaviside	Oliver Heaviside
Hilbert	David Hilbert
Hubble	Edwin Hubble
Jacobi	Carl Gustav Jakob Jacobi
Joule	James Prescott Joule
Keppler	Johannes Keppler
Kerr	Roy Kerr
Killing	Wilhelm Killing
Kronecker	Leopold Kronecker
Kruskal	Martin Kruskal
Levi-Civita	Tullio Levi-Civita
Lagrange	Joseph Louis Lagrange
Laplace	Pierre Simon Laplace
Leibniz	Gottfried Wilhelm Leibniz
Lie	Marius Sophus Lie
Lienard	Alfred-Marie Liénard
Lindquist	Richard W. Lindquist

Lorentz	Hendrik Antoon Lorentz
Lorenz	Ludvig Lorenz
Mach	Ernst Mach
Maxwell	James Clerk Maxwell
Michelson	Albert Abraham Michelson
Minkowski	Hermann Minkowski
Morley	Edward W. Morley
Newman	Ezra T. Newman
Newton	Isaac Newton
Noether	Emmy Noether
Nordström	Gunnar Nordström
Ohm	Georg Simon Ohm
Painlevé	Paul Painlevé
Penrose	Roger Penrose
Pitágoras	
Planck	Max Planck
Poincaré	Henri Poincaré
Poisson	Siméon Denis Poisson
Poynting	John Henry Poynting
Reissner	Hans Reissner
Ricci	Gregorio Ricci Curbastro
Riemann	Bernhard Riemann
Rindler	Wolfgang Rindler
Rosen	Nathan Rosen
Savart	Félix Savart
Schwarzschild	Karl Schwarzschild
Snell	Willebrord Snel van Royen
Szekeres	George Szekeres
Taylor	Brook Taylor
Watt	James Watt
Wheeler	John Archibald Wheeler
Wiechert	Emil Johann Wiechert

Diccionario español-inglés:

En la Internet y en las bibliotecas universitarias hay mucho material en inglés, y no siempre se encuentran traducciones al español actualizadas. Por esa razón incluimos en este capítulo un conjunto de expresiones técnicas en inglés para ayudar a los lectores que quieran ampliar los temas.

agujero de gusano	wormhole
agujero negro	black hole
área, longitud, volumen	area, length, volume
arrastre de marco	frame dragging
avance del perihelio	perihelion advance
caída libre	free fall
cantidad de movimiento	momentum
campo, potencial	field, potential
carga, corriente	charge, current
carta de Rindler	Rindler chart
colapso gravitacional	gravitational collapse
condición de calibre	gauge condition

conjetura	assumption (en alemán *Ansatz*)
cono de luz	light cone
convenio de la suma de Einstein	Einstein summation convention
corrimiento al rojo	red shift (Doppler)
cuadrivector	four-vector
deformación del espacio	space warp
derivada covariante	covariant derivative
derivada parcial	partial derivative
divergencia, gradiente, rotor	divergence, gradient, curl
enana blanca	white dwarf
energía, trabajo	energy, work
escalar, vector, tensor	scalar, vector, tensor
estrella de neutrones	neutron star
éter luminífero	luminiferous ether (*aether*)
experimento mental	thought experiment (*en alemán Gedankenexperiment*)
fuerza, masa, aceleración	force, mass, acceleration
fuerza de marea	tidal force
gigante roja	red giant
horizonte de sucesos	event horizon
intervalo tipo-tiempo, tipo-espacio	timelike interval, spacelike interval
línea del universo	world line
masa en reposo	rest mass
materia oscura	dark matter
mínimo acople	minimal coupling
movimiento uniforme	uniform motion
nube de partículas	cloud of particles
onda electromagnética	electromagnetic wave
paradoja de los gemelos	twin paradox
polvo	dust
taquión	tachyon
tensor de energía-impulso	stress-energy-momentum tensor
tiempo propio	proper time, elapsed time
traza de una matriz	trace of a matrix
variedad diferenciable	differentiable manifold
velocidad de escape	escape velocity
velocidad de la luz	light speed

15. EJERCICIOS RESUELTOS.

1.3: Producto de matrices jacobianas:

[Jac]=

$$\begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & +r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{bmatrix}$$

Traspuesto [Jac*]=

$$\begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ r\cos\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta \\ -r\sin\theta\sin\varphi & +r\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{bmatrix}$$

Este producto matricial es tedioso pero creemos que es instructivo hacerlo al menos una vez.
En caso de dificultad podemos controlar los cálculos con ayuda de un paquete de software matemático como Scilab o Maxima.

$$\begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & +r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ r\cos\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta \\ -r\sin\theta\sin\varphi & +r\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{rr}=1 & g_{r\theta} & g_{r\varphi} \\ g_{\theta r} & g_{\theta\theta}=r^2 & g_{\theta\varphi} \\ g_{\varphi r} & g_{\varphi\theta} & g_{\varphi\varphi}=r^2\sin^2\theta \end{bmatrix}$$

Hay que operar con paciencia de a un casillero por vez.

$g_{rr} = \sin^2\theta\cos^2\varphi + \sin^2\theta\sin^2\varphi + \cos^2\theta$

$g_{rr} = \sin^2\theta(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + \cos^2\theta$

$g_{rr} = \sin^2\theta.1 + \cos^2\theta$

$g_{rr} = 1$

$g_{r\theta} = r.\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi + r.\sin\theta\cos\theta\sin^2\varphi - r.\sin\theta\cos\theta$

$g_{r\theta} = r.\sin\theta\cos\theta.[\ \cos^2\varphi + \sin^2\varphi - 1\ ]$

$g_{r\theta} = 0$

$g_{r\varphi} = -r.\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi + r.\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi + 0$

$g_{r\varphi} = 0$

$g_{\theta r} = r.\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi + + r.\sin\theta\cos\theta\sin^2\varphi - r.\sin\theta\cos\theta$

$g_{\theta r} = r.\sin\theta\cos\theta.[\ \cos^2\varphi + \sin^2\varphi - 1\ ]$

$g_{\theta r} = 0$

$g_{\theta\theta} = r^2.\cos^2\theta\cos^2\varphi + r^2.\cos^2\theta\sin^2\varphi + r^2.\sin^2\theta$

$g_{\theta\theta} = r^2.\cos^2\theta(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + r^2.\sin^2\theta$

$g_{\theta\theta} = r^2.\cos^2\theta + r^2.\sin^2\theta$

$g_{\theta\theta} = r^2$

$g_{\theta\varphi} = -r^2.\cos\theta\sin\theta\cos\varphi\sin\varphi + r^2.\cos\theta\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi$

$g_{\theta\varphi} = 0$

$g_{\varphi r} = -r.\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi + r.\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi + 0$

$g_{\varphi r} = 0$

$g_{\varphi\theta} = -r^2.\cos\theta\sin\theta\cos\varphi\sin\varphi + r^2.\cos\theta\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi$

$g_{\varphi\theta} = 0$

$g_{\varphi\varphi} = r^2.sen^2\theta sen^2\varphi + r^2.sen^2\theta cos^2\varphi$

$g_{\varphi\varphi} = r^2.sen^2\theta[sen^2\varphi + cos^2\varphi]$

$g_{\varphi\varphi} = r^2.sen^2\theta$

1.4.2: Métrica en coordenadas cilíndricas:

El cambio de variables para pasar de coordenadas cartesianas a cilíndricas es:

$x=r.cos\varphi$

$y=r.sen\varphi$

Los diferenciales son (dx,dy,dz) convertidos a (dr, dφ, dz):

$dx=dr.cos\varphi - r.d\varphi.sen\varphi$

$dy=dr.sen\varphi + r.d\varphi.cos\varphi$

La métrica, expandida en coordandas cartesianas, se escribe:

$dS^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ →sustituimos

$dS^2 = (dr.cos\varphi - r.d\varphi.sen\varphi)^2 + (dr.sen\varphi + r.d\varphi.cos\varphi)^2 + dz^2$

$dS^2 = dr^2.cos^2\varphi - 2r.dr.d\varphi.cos\varphi.sen\varphi + r^2.d\varphi^2.sen^2\varphi + dr^2.sen^2\varphi + 2r.dr.d\varphi.sen\varphi.cos\varphi + r^2.d\varphi^2.cos^2\varphi + dz^2$

$dS^2 = dr^2.cos^2\varphi - 2r.dr.d\varphi.cos\varphi.sen\varphi + r^2.d\varphi^2.sen^2\varphi + dr^2.sen^2\varphi + 2r.dr.d\varphi.sen\varphi.cos\varphi + r^2.d\varphi^2.cos^2\varphi + dz^2$

$dS^2 = dr^2.cos^2\varphi + 0 + r^2.d\varphi^2.sen^2\varphi + dr^2.sen^2\varphi + r^2.d\varphi^2.cos^2\varphi + dz^2$

$dS^2 = dr^2.cos^2\varphi + r^2.d\varphi^2.sen^2\varphi + dr^2.sen^2\varphi + r^2.d\varphi^2.cos^2\varphi + dz^2$ →factorizamos

$dS^2 = dr^2(cos^2\varphi\ sen^2\varphi) + r^2.d\varphi^2.(sen^2\varphi + cos^2\varphi) + dz^2$ →identidad trigonométrica

$dS^2 = dr^2.(1) + r^2.d\varphi^2.(1) + dz^2$

$dS^2 = dr^2 + r^2.d\varphi^2 + dz^2$

La forma matricial se obtiene identificando los coeficientes que multiplican a los productos de diferenciales coordenados de acuerdo con la fórmula: $dS^2=\Sigma_{ij}\ g_{ij}.dcoord[i].dcoord[j]$.

De los posibles 9 términos que se podrían forman con i,j variando en 1..3, solo hay 3:

i=1 j=1, coord[i]=r

i=2 j=2, coord[i]=φ

i=3 j=3, coord[i]=z

Solo está poblada la diagonal de la matriz, no hay elementos "cruzados".

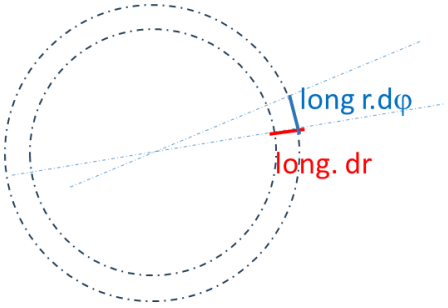
$[g]=$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

También se puede ver escribiendo el desplazamiento vectorial entre dos puntos infinitesimalmente cercanos:

$d\vec{S} = dr.\vec{E_r} + d\varphi.\vec{E_\varphi} + dz.\vec{E_z}$

Al ser los 3 vectores base mutuamente ortogonales, el módulo cuadrado $dS^2=|d\vec{S}\cdot d\vec{S}|$ es simplemente la suma de cuadrados.



.

1.4.4: Gradiente covariante:

En coordenadas cilíndricas el gradiente de una función f es: $\nabla f=\partial f/\partial r\ \hat{e}_r + 1/r.\partial f/\partial\varphi.\hat{e}_\varphi + \partial f/\partial z\ \hat{e}_z$

2.1.3: Ecuación de continuidad de la carga:

$\nabla \cdot \vec{J} + \partial_t \rho = 0$

Cambio de variables:

$t=t'$	$x=x'+v_o.t'$	$y=y'$	$z=z'$
$\rho=\rho'$	$J_x=J'_x+v_o.\rho'$	$J_y=J'_y$	$J_z=J'_z$
$\partial_t=\partial'_t - v_o.\partial'_x$	$\partial_x=\partial'_x$	$\partial_y=\partial'_y$	$\partial_z=\partial'_z$

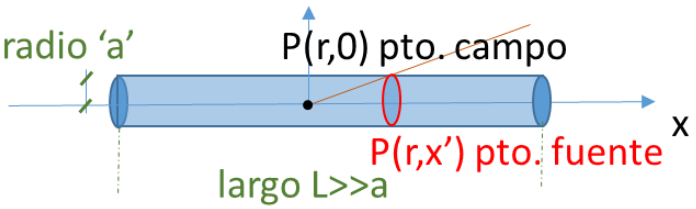
$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{J} + \partial_t \rho &= \partial_x J_x + \partial_y J_y + \partial_z J_z + \partial_t \rho \\ &= \partial'_x(J'_x + v_o.\rho') + \partial'_y J'_y + \partial'_z J'_z + (\partial'_t - v_o.\partial'_x)\rho' \\ &= \partial'_x J'_x + v_o.\partial'_x \rho' + \partial'_y J'_y + \partial'_z J'_z + \partial'_t \rho' - v_o.\partial'_x \rho' \\ &= \partial'_x J'_x + \partial'_y J'_y + \partial'_z J'_z + \partial'_t \rho' \\ &= \nabla' \cdot \vec{J'} + \partial'_t \rho' = 0\end{aligned}$$

Queda exactamente la misma ecuación con la misma forma, ahora con todas las magnitudes y derivadas referidas al nuevo sistema Σ'.

La ecuación resaltada en verde surge de la regla de la cadena.

$$\begin{aligned}\partial/\partial t &= \partial t'/\partial t.\partial/\partial t' + \partial x'/\partial t \;.\; \partial/\partial x' \\ &= 1.\partial/\partial t' + -v_o \;.\; \partial/\partial x'\end{aligned}$$

2.1.6: Campo eléctrico en un cilindro largo:



En los textos de Electromagnetismo se puede encontrar un tratamiento más detallado de este escenario.
A los efectos de este trabajo solo destacamos los aspectos que tienen que ver con los estudios relativistas de los capítulos 2 y 3.

Parte-a)

El potencial en el centro del cilindro es contribución de los diferentes anillos, cada anillo con carga 'dq' y ubicado en coordenada x' aporta $d\Phi = dq/(4\pi\epsilon_o\sqrt{a^2+x'^2})$

El Φ total es el resultado de integrar los dΦ entre $x'= -L/2$ y $x'=+L/2$.

Si el cilindro es suficientemente largo $L \gg a$ podemos aproximar $dq \approx \lambda.dx'$, es decir, suponer que la carga por unidad de longitud es uniforme. Un cilindro real siempre va a presentar distorsiones en los alrededores de los bordes $x=\pm L/2$; aquí ignoramos estos efectos.

Con esta simplificación tenemos $\Phi(0) \approx \lambda/(4\pi\epsilon_o)\int_L dx'/\sqrt{a^2+x'^2}$

La integral se calcula por funciones hiperbólicas como $\Phi(0) \approx \lambda/(2\pi\epsilon_o).\text{argsh}[L/(2a)]$

En nuestro caso $L \gg a$, lo que nos permite aproximar $\Phi(0) \approx \lambda/(2\pi\epsilon_o).\log(L/a)$

Suponemos que el cilindro es equipotencial, lo que implica que podemos utilizar este Φ(0) como un valor representativo del potencial en todos sus puntos.

Parte-b)

Por otro lado, la aproximación de cilindro infinito dice que $\vec{E} \approx \lambda/(2\pi\epsilon_o r)\,\hat{e}_r$ en coordenadas cilíndricas.

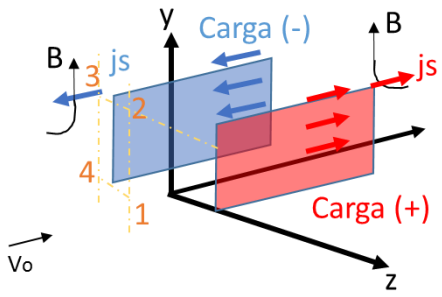
La diferencia de potencial entre la superficie del cilindro r=a y un punto 'r' se calcula como integral de línea de $\vec{E}$ y vale: $\lambda/(2\pi\epsilon_o r).\log(r/a)$.

Es muy común que los potenciales eléctricos estén indefinidos a menos de una constante.

En este caso, sería válida cualquier función de potencial $\Phi(r)= \lambda/(2\pi\epsilon_o).\log(K/r)$ $\forall K$.
Elegimos K=L (largo del cilindro) para que $\Phi(r=a)$ sea compatible con el Φo hallado en la parte-a.

Conclusión: Utilizamos en este trabajo $\Phi(r) \approx \lambda/(2\pi\epsilon_o).\log(L/r)$
La versión magnética de este escenario es un cable largo con corriente uniforme 'I'.
Siguiendo los mismos argumentos matemáticos concluimos $\vec{A}(r) \approx \mu_o I/(2\pi).\log(L/r).\hat{x}$ con la advertencia de que los potenciales vectoriales magnéticos están indefinidos a menos de un gradiente. Solo una condición de calibre como la de Coulomb o Lorenz puede eliminar esa indeterminación.

2.3.1: Campo magnético de placas conductoras móviles:



La fórmula integral del potencial vectorial dice así:

$\vec{A} = \mu_o/(4\pi).\iiint_{Vol} \vec{J}(\vec{r_f})/|\vec{r}-\vec{r_f}|dVol$ — $\vec{r}$=punto de campo, $\vec{r_f}$ =punto fuente

$\vec{A} = \mu_o/(4\pi).\iiint_{Vol} \vec{J}(\vec{r_f})/|\vec{r}-\vec{r_f}|dVol$ — $\rightarrow \vec{J}=\rho.\vec{v_o}$ (solo corrientes de transporte)

$\vec{A} = \mu_o/(4\pi).\iiint_{Vol} \vec{v_o}\rho(\vec{r_f})/|\vec{r}-\vec{r_f}|dVol$ — $\rightarrow \vec{v_o}$ constante sale fuera de la integral

$\vec{A} = \mu_o\vec{v_o}/(4\pi).\iiint_{Vol} \rho(\vec{r_f})/|\vec{r}-\vec{r_f}|dVol$

$\vec{A} = \vec{v_o}/c^2.\ 1/(4\pi\epsilon_o).\iiint_{Vol} \rho(\vec{r_f})/|\vec{r}-\vec{r_f}|dVol$

$\vec{A} = \vec{v_o}/c^2.\ \Phi'$

Reconocemos Φ', el potencial electrostático del referencial solidario a las placas.
Si recordamos la solución electrostática del condensador de placas paralelas sabemos que vale

$\Phi(z)=E_o.z = \sigma.z/\epsilon_o$.

Si no recordamos la solución o nunca la hicimos, podemos igual resolver el caso magnético mediante el siguiente análisis:
La fórmula integral del potencial $\vec{A}$ indica que hay que sumar corrientes $\vec{J}$; en este problema las corrientes $\vec{js}$ son todas según $\hat{x}$, lo que motiva a buscar potenciales únicamente en la dirección $\vec{x}$.
$\vec{A}=A_x(x,y,z).\hat{x}$

Las placas planas, a los efectos de este problema simplificado, se supone que se extienden infinitamente en las coordenadas x,y, lo que implica que no puede haber variación en esas coordenadas. Se "ve" lo mismo en x=0 que en x=1, x=2…etc. Igual que en y=-1, y=0, y=+1…etc.
Solo tiene sentido que haya variaciones según 'z', porque implica alejarse de una placa y acercarse a la otra.

$\vec{A}=A_x(z).\hat{x}$
Un candidato es $\vec{A} = B_o.z\ \hat{x}$, ya que acompaña a las corrientes de las placas:

- $\vec{A}$ = según $+\hat{x}$ para z>0 (las corrientes positivas están más cerca y pesan más)
- $\vec{A}$ = 0 nulo en el centro en z=0, por simetría
- $\vec{A}$ = según $-\hat{x}$ para z<0 (las corrientes negativas están más cerca y pesan más)

$\nabla \wedge \vec{A} = \nabla(B_o.z) \wedge \hat{x}$

$\nabla \wedge \vec{A} = B_o.\hat{z} \wedge \hat{x}$

$\nabla \wedge \vec{A} = B_o.\hat{y}$

$\vec{B} = B_o.\hat{y}$

$\vec{H} = B_o/\mu_o\ \hat{y}$

El campo magnético es uniforme en la región entre placas $-L/2 \leq z \leq +L/2$.
Fuera de esa región, $\vec{H}=0$.
El salto abrupto o discontinuidad se corresponde con las corrientes superficiales $B_o/\mu_o=j_S=\sigma.v_o$

La regla del pulgar y la mano derecha aplicada a cada placa debería confirmar esta dirección que asumimos.
Y la Ley de Ampere debería confirmar con total certeza el valor numérico, si hacemos la integral de línea $\int_{\mathcal{C}}\vec{H}\cdot d\vec{S}$ a lo largo de una espira $\mathcal{C}$ que rodee a una de las placas como la trayectoria 1→2→3→4→1 de la figura.

- En el tramo 1→2 circulamos longitudinal al campo con x=y=cte, z varía entre 0 y Δz.

$H=B_o/\mu_o \qquad \rightarrow \int_{12}\vec{H}\cdot d\vec{S} = B_o/\mu_o.\Delta z$

- En el tramo 2→3 circulamos con z=Δz cte, transversal a las líneas de campo.

$H=0 \qquad \rightarrow \int_{23}\vec{H}\cdot d\vec{S} = 0$

- En el tramo 3→4 bajamos en contra de las líneas de campo. Pero ya no hay campo, estamos fuera de la región entre placas.

$H=0 \qquad \rightarrow \int_{34}\vec{H}\cdot d\vec{S} = 0$

- En el tramo 4→1 circulamos con z=0 cte, transversal a las líneas de campo.

$H=0 \qquad \rightarrow \int_{41}\vec{H}\cdot d\vec{S} = 0$

La suma de los 4 tramos da $\int_{\mathcal{C}_{1234}}\vec{H}\cdot d\vec{S} = B_o/\mu_o.\Delta z$
Por Teorema de Stokes, esta integral debería coincidir con el flujo del rotor de $\vec{H}$ (o sea, $\vec{J}$), a través del área encerrada por la curva. Es decir, la corriente total que atraviesa, medida en [Amp].
Las placas móviles representan una corriente superficial o corriente por unidad de longitud j_S (Amp/m), luego la corriente que atraviesa la espira es Δz.jS

→ $B_o/\mu_o.\Delta z = j_S.\Delta z$

$B_o= \mu_o.\ j_S$

Por otro lado, $j_S = \sigma.v_o$.
Lo confirmamos por análisis dimensional:

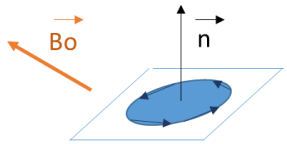
$[\sigma]=[Coulomb/m^2]$, $[v_o]=[m/seg] \qquad \rightarrow [\sigma.v_o]=[Coul/m/s] = (Coul/s)\ /\ m = Amp/m$

2.1.4: Potencial dependiente de la velocidad:

En el Lagrangeano clásico de una particula cargada aparece $U_{pot}=q.\Phi - q.\vec{u}\cdot\vec{A}$
La parte fija es la energía electrostática q.Φ.
Mostraremos aquí una guía de porqué la parte variable dependiente de la velocidad $-q.\vec{u}\cdot\vec{A}$ (con su signo negativo) se puede interpretar como una energía potencial magnética.

Imaginamos un cable cerrado (una espira) que transporta una corriente 'I' y encierra un área ΔA con vector de orientación $\vec{n}$ (según regla de la mano derecha).
La espira está inmersa en un campo magnético externo $\vec{B_o}$ creado por otras fuentes.

Para evitar complicaciones suponemos que la espira es de dimensiones reducidas y que el campo externo varía poco en esa región.



Recordamos del Electromagnetismo el momento dipolar magnético del circuito de la espira:

$\vec{m} = I.\Delta A.\ \vec{n}$

Recordamos también la fórmula para la energía potencial magnética de un dipolo magnético $\vec{m}$ inmerso en un campo externo $\vec{B_0}$.

$U_{pot} = -\vec{m} \cdot \vec{B_0}$

$U_{pot} = -\vec{m} \cdot \vec{B_0}$ → sustituimos $\vec{m}$

$U_{pot} = -\ I.\Delta A.\ \vec{n} \cdot \vec{B_0}$

$U_{pot} = -\ I.\Delta A.\ \vec{n} \cdot \vec{B_0}$ → reconocemos flujo magnético encerrado por la espira

$U_{pot} = -\ I.\Phi_{mag}$

$U_{pot} = -\ I.\Phi_{mag}$ →expresmos el flujo por teorema de Stokes

$U_{pot} = -\ I.\ \int_{\mathcal{C}} \vec{A} \cdot d\vec{l}$ → $\mathcal{C}$ = contorno del cable

$U_{pot} = -\int_{\mathcal{C}} I.d\vec{l} \cdot \vec{A}$

Llamamos 'ρ' a la densidad volumétrica de portadores de carga, $\vec{u}$ a su velocidad media.

Para cada pequeño trozo de cable sustituimos $I.d\vec{l} = \vec{J}.dVol = \rho.\vec{u}.dVol$.

$U_{pot} = -\int_{\mathcal{C}} \rho.\vec{u}.dVol \cdot \vec{A}$ →reconocemos ρ.dVol=q carga del volumen

$U_{pot} = -\int_{\mathcal{C}} q.\vec{u} \cdot \vec{A}$

La U_{pot} total es la suma de las contribuciones $-q.\vec{u} \cdot \vec{A}$ de cada pequeño volumen.

$U_{pot} = -\vec{m} \cdot \vec{B_0} = -\int_{\mathcal{C}} q.\vec{u} \cdot \vec{A}$

Así como las cargas "buscan" el mínimo de energía potencial electrostática q.Φ, los flujos de corriente buscan el máximo $q.\vec{u} \cdot \vec{A}$, por lo que el negativo de este producto escalar se comporta como una energía potencial magnética.

2.1.4: Ecuaciones del movimiento:

Lagrangeano: $\mathcal{L}(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},t) = E_{cin} - U_{pot}$

$= m/2.(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - q.\Phi + q.(\dot{x}.A_x + \dot{y}.A_y + \dot{z}.A_z)$

Momento de la coord-x: $p_x = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{x}$

Ecuación de Euler&Lagrange: $dp_x/dt - \partial\mathcal{L}/\partial x = f_x$

(1) –(2) = (3)

Calculamos los términos:

$p_x = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{x}$

$p_x = m.\dot{x} + q.A_x$

$(1) = dp_x/dt = m.\ddot{x} + q.(\partial_t A_x + \dot{x}.\partial_x A_x + \dot{y}.\partial_y A_x + \dot{z}.\partial_z A_x)$

$(2) = \partial\mathcal{L}/\partial x = -q.\partial_x\Phi + q.(\dot{x}.\partial_x A_x + \dot{y}.\partial_x A_y + \dot{z}.\partial_x A_z)$

Sustituimos

$(1) - (2) = f_x$

$(1) = (2) + f_x$

$m.\ddot{x} + q.(\partial_t A_x + \dot{x}.\partial_x A_x + \dot{y}.\partial_y A_x + \dot{z}.\partial_z A_x) = -q.\partial_x\Phi + q.(\dot{x}.\partial_x A_x + \dot{y}.\partial_x A_y + \dot{z}.\partial_x A_z) + f_x$

$m.\ddot{x} + q.(\partial_t A_x + \cancel{\dot{x}.\partial_x A_x} + \dot{y}.\partial_y A_x + \dot{z}.\partial_z A_x) = -q.\partial_x\Phi + q.(\cancel{\dot{x}.\partial_x A_x} + \dot{y}.\partial_x A_y + \dot{z}.\partial_x A_z) + f_x$

$m.\ddot{x} + q.(\partial_t A_x + \dot{y}.\partial_y A_x + \dot{z}.\partial_z A_x) = -q.\partial_x\Phi + q.(\dot{y}.\partial_x A_y + \dot{z}.\partial_x A_z) + f_x$

$m.\ddot{x} = -q.(\partial_t A_x + \dot{y}.\partial_y A_x + \dot{z}.\partial_z A_x) - q.\partial_x\Phi + q.(\dot{y}.\partial_x A_y + \dot{z}.\partial_x A_z) + f_x$

$m.x^{\cdot\cdot} = f_x - q.\partial_x\Phi - q.\partial_t A_x - q.(\dot{y}.\partial_y A_x + \dot{z}.\partial_z A_x) + q.(\dot{y}.\partial_x A_y + \dot{z}.\partial_x A_z)$

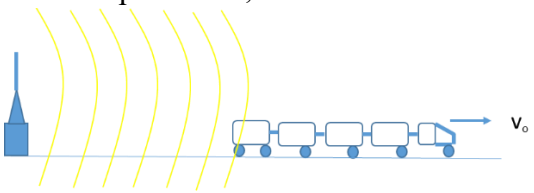
$m.x^{\cdot\cdot} = f_x - q.(\partial_x\Phi + \partial_t A_x) + q.\dot{y}.(\partial_x A_y - \partial_y A_x) + q.\dot{z}.(\partial_x A_z - \partial_z A_x)$

$m.x^{\cdot\cdot} = f_x + q.(E_x) + q.\dot{y}.(B_z) + q.\dot{z}.(-B_y)$

Reconocemos la componente-x del campo eléctrico,
y el producto vectorial $\vec{u} \wedge \vec{B}$ proyectado en dirección-x.

2.2.2: Efecto Doppler cinemático:

Onda de período T, frecuencia f=1/T



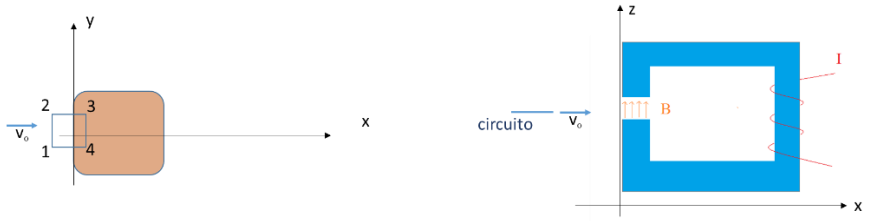
El tren se aleja de la estación siguiendo una trayectoria $x_T(t) = v_o.t$
El frente de ondas n-ésimo evoluciona como $x_n(t) = c.(t - n.T) = c.(t - n/f)$
Alcanza al tren en el instante t' en que se igualan $x_n(t') = x_T(t')$

$v_o.t' = c.(t' - n/f)$
$(c - v_o).t' = c.n/f$
$t' = c.n/f/(c - v_o)$

La separación entre el arribo de 2 frentes de onda consecutivos es la diferencia entre t'(n+1) y t'(n).
O sea el período T' medido en el referencial móvil Σ'.

$T' = c/f/(c - v_o)$
$f' = 1/T'$
$f' = f.(c - v_o)/c$
$f' = f.(1 - v_o/c)$

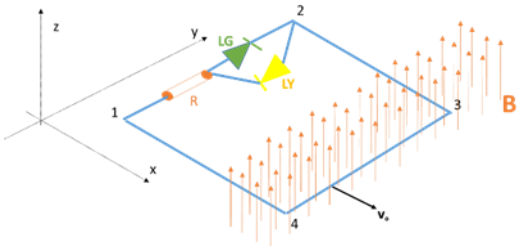
3.2.2: Generador de Faraday:



El enfoque clásico comienza por calcular cuánta superficie del circuito es atravesada por el campo magnético. Para simplificar los cálculos suponemos que la zona magnética comienza en x=0.
área=largo.ancho, siendo:

largo=$x(t) = v_o.t$ abscisa instantánea de la barra '34'
ancho=Δy separación entre la barra '23' y la barra '41'.

Flujo magnético Φ_m = campo.área $= B_o.\Delta y.x(t)$



f.e.m de Faraday $\epsilon = \int_{\circlearrowleft 43214} \vec{E'} \cdot dP = -d\Phi_m/dt' = -B_o.\Delta y.dx(t)/dt = -B_o.\Delta y.v_o$

La regla del pulgar y la mano derecha ayuda a deducir que la corriente circula en sentido horario 12341.

Un detalle a tener en cuenta es que estamos calculando la integral de línea con el campo $\vec{E'}$ *medido en el referencial solidario al circuito móvil*. Allí el campo eléctrico $\vec{E'}$ tiene circulación no-nula alrededor de trayectos cerrados como el 43214. La derivada temporal es la $\partial/\partial t'$ del referencial Σ'; estamos utilizando Teoría de la Relatividad sin percatarnos.

Si analizamos el problema en el referencial Σ solidario al electroimán, nos enfrentamos a un campo eléctrico irrotacional y a un campo magnetostático que no varía en el tiempo. La Ley de Faraday $\nabla \wedge \vec{E} = -\partial \vec{B}/\partial t$ aporta algo trivial 0=0.

En Σ tenemos definido un potencial eléctrico $\phi(y) = -B_o.v_o.y$
Toda la barra '41' está a potencial alto, y toda la barra '23' está a potencial bajo.
La corriente circula por el LED verde LG siguiendo las leyes conocidas de la teoría de circuitos:
Desde el potencial positivo en $y= -\Delta y/2$ (punto 1) hasta el potencial negativo en $y=\Delta y/2$ (punto 2).

Queda sin justificar totalmente el hecho de que la corriente vuelva por el tramo 3→4 a contramano del potencial. Esto es un comportamiento típico de los generadores, y en general se precisa algo llamado "fuerza electromotriz" o f.e.m. En el caso de las pilas o baterías esta f.e.m es de origen químico, en este generador de Faraday la f.e.m es de origen magnético.

La Relatividad Especial aporta argumentos interesantes para complementar este estudio y resolver un *cabo suelto* que pueden dejar los razonamientos puramente clásicos.
El campo eléctrico en el referencial móvil Σ' vale, de acuerdo con lo expuesto en la sección 3.2.2:

$$\vec{E'} = \vec{E} + \vec{v_o} \wedge \vec{B}$$
$$\vec{E'} = \vec{E} + (v_o.\hat{x}) \wedge (B_o.\hat{z})$$
$$\vec{E'} = \vec{E} - v_o.B_o.\hat{y}$$

En el límite en que los cables tienen conductividad ideal, este $\vec{E'}$ debe ser ≈ 0. $\rightarrow \vec{E} = v_o.B_o\ \hat{y}$
La fuerza magnética equilibra a la eléctrica y permite que la corriente fluya en contra del potencial, "*trepando*" desde el borne negativo (3) hacia el borne positivo (4).

Fuerza de Laplace:

$$\vec{F} = I.\ \vec{\ell} \wedge \vec{B}$$ $\vec{\ell}$ orientado según el sentido dibujado de la corriente
$$\vec{F} = I.(-\Delta y.\ \hat{y}) \wedge (B_o.\hat{z})$$
$$\vec{F} = -I.\Delta y.B_o.(\hat{y} \wedge \hat{z}\ )$$
$$\vec{F} = -I.\Delta y.B_o.\hat{x}$$

Esta fuerza electromagnética se opone al movimiento de la barra, si queremos mantener el movimiento (y el generador activo) debemos suministrar potencia mecánica a través de una fuerza opuesta $\vec{F_{mec}} = -\vec{F}$

$$\dot{W} = \vec{v_o} \cdot \vec{F_{mec}}$$
$$\dot{W} = v_o.I.\Delta y.B_o. \quad \rightarrow \text{reordenamos}$$
$$\dot{W} = I.\Delta y.B_o.v_o \quad \rightarrow \text{reconocemos el campo eléctrico } E=v_o.B_o$$
$$\dot{W} = I.\ \Delta y.E$$
$$\dot{W} = I\ .\ \Delta y.E \quad \rightarrow \text{identificamos al voltaje como integral de línea de } \vec{E}$$
$$\dot{W} = I\ .\ V$$

Nos queda un balance de potencia exacto entre la potencia mecánica invertida en mantener la barra en movimiento y la potencia eléctrica consumida en el LED 'LG' y la resistencia 'R'.

3.3.1: Potencial vectorial magnético:

Analizamos un cable de longitud 'L', corriente 'I' a lo largo de la dirección-x.

$$A_x = \mu_o.I/(2\pi).\log(L/r)$$

$\vec{A} = A_x.\hat{x}$

$\nabla \wedge \vec{A} = (\nabla A_x) \wedge \hat{x}$ →rotor de un escalar por un vector

$\nabla \wedge \vec{A} = (\partial_r A_x\ \hat{e}_r) \wedge \hat{x}$

$\nabla \wedge \vec{A} = (\partial_r A_x).\ \hat{e}_r \wedge \hat{x}$ →versores de coordenadas cilíndricas

$\nabla \wedge \vec{A} = (\partial_r A_x).(-\hat{e}_\varphi)$

$\nabla \wedge \vec{A} = (\partial_r A_x).(-\hat{e}_\varphi)$

$\nabla \wedge \vec{A} = \mu_o.I/(2\pi).(\partial_r\ \log(L/r)).(-\hat{e}_\varphi)$

$\nabla \wedge \vec{A} = \mu_o.I/(2\pi).(\partial_r(-\log(r/L)).(-\hat{e}_\varphi)$

$\nabla \wedge \vec{A} = \mu_o.I/(2\pi).(\partial_r(\log(r/L)).(\hat{e}_\varphi)$ →logaritmo del cociente

$\nabla \wedge \vec{A} = \mu_o.I/(2\pi).(\partial_r(\log(r) - \log(L)).(\hat{e}_\varphi)$ →derivadas elementales

$\nabla \wedge \vec{A} = \mu_o.I/(2\pi).(1/r - 0).(\hat{e}_\varphi)$

$\nabla \wedge \vec{A} = \mu_o.I/(2.\pi.r).\ \hat{e}_\varphi$

3.3.2: Inversión fallida:

Los primeros avances en Relatividad Especial sugieren una "corrección" de las transformaciones de Galileo, para contemplar el hecho de que las corrientes móviles crean una densidad de carga aparente:

(ec0) $\rho = \rho' + v_o.J'_x/c^2$

(ec1) $J_x = J'_x + v_o.\rho'$

Esta "corrección", sin embargo, arruina la posibilidad de invertir las fórmulas.

Multiplicamos la ecuación (ec0) por 'v_o' y luego restamos de (ec1):

–	$v_o.\rho$	$= v_o.\rho'$	$+ v_o^2.J'_x/c^2$
+	J_x	$= v_o.\rho'$	$+J'_x$
	$J_x - v_o.\rho$	$= 0$	$+ (1-v_o^2/c^2).J'_x$

$J'_x = 1/(1-v_o^2/c^2).\ (J_x - v_o.\rho)$

Multiplicamos la ecuación (ec1) por 'v_o/c^2' y luego restamos de (ec0):

+	ρ	$= \rho'$	+	$v_o.J'_x/c^2$
–	$v_o/c^2.J_x$	$= v_o^2/c^2.\rho'$	+	$v_o/c^2.J'_x$
	$\rho - v_o/c^2.J_x$	$= (1-v_o^2/c^2).\rho'$		

$\rho' = 1/(1-v_o^2/c^2).\ (\rho - v_o./c^2.J_x)$

La situación es altamente simétrica:

- En Σ se ve al otro referencial Σ' moviéndose con velocidad v_o
- En Σ' se ve al otro referencial Σ moviéndose con velocidad $-v_o$

Las fórmulas deberían tener la misma estructura salvo un cambio de signo en v_o.

Pero no lo están teniendo por causa de ese factor parásito $1/(1-v_o^2/c^2)$.

Lo que implica que esta "corrección" es incompleta y apenas sirve como aproximación de 2do orden para bajas velocidades $v_o \ll c$.

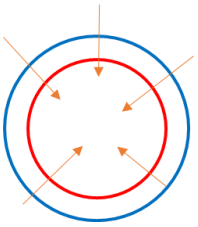
La corrección completa son las fórmulas de Lorentz, que toman la raíz del factor parásito $1/(1-v_o^2/c^2)$ para que quede repartido por igual en la transformación Σ→Σ' y en la inversa Σ'→Σ.

3.3.4: Función δ Dirac:

Consideramos un campo escalar $\Phi(\vec{r})=1/r$, siendo 'r' la distancia al origen en coordenadas esféricas.

Su gradiente es un campo vectorial $\vec{G}=\nabla\Phi = -\hat{e}_r/r^2$

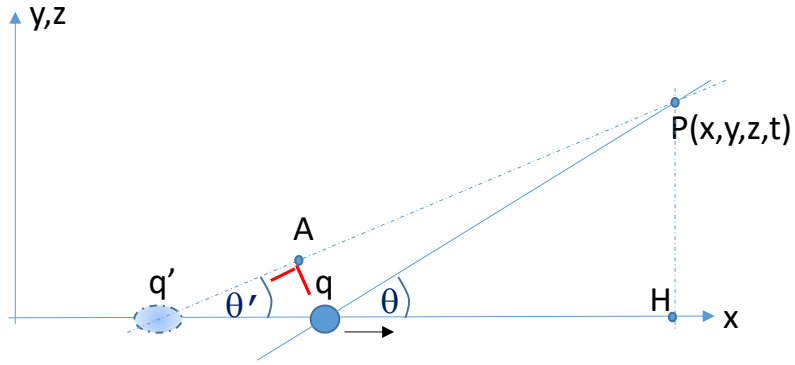
Estudiamos el flujo a través de superficies esféricas $\iint \vec{G} \cdot \vec{n}\ d_{area}$



El flujo que entra a la cáscara azul de la figura vale 4π.
Es igual que el flujo que entra a la cáscara roja, lo que es coherente con la idea de que no hay acumulación de flujo en la región entre ambas cáscaras esféricas porque se anula la divergencia $\nabla\cdot\vec{G}=1/r^2.\partial_r(r^2.G_r)=0$
Sin embargo, el Teorema de la Divergencia de Gauss-Stokes dice que $\iiint\nabla\cdot\vec{G}\,d_{vol}=-4\pi$
La divergencia $\nabla\cdot\vec{G}$ es supuestamente nula en todos los puntos, pero su integral volumétrica mantiene un valor constante aunque la cáscara roja se achique indefinidamente hasta contener solo al origen r=0. En ese punto la divergencia debería valer infinita para poder cumplir con la integral volumétrica.
En la expresión $\nabla\cdot\vec{G}=1/r^2.\partial_r(r^2.G_r)$, cuando $r\to0$, se genera una indeterminación $\infty*0$ donde el infinito verde $1/r^2$ pesa más que el cero celeste $\partial_r(r^2.G_r)$.

La expresión matemática es $\nabla^2(1/r)=-4\pi\delta(\vec{r})$.
La δ de Dirac modela a este tipo de funciones nulas en "casi todo" el espacio salvo en un punto donde concentran todo su valor.
En muchos casos es útil visualizarla como el límite de una familia de funciones donde cierto parámetro modela el ancho y la altura de su pico.
Ejemplo: $\Phi_a(r) = 1/\sqrt{a^2+r^2}$, $\nabla^2\Phi_a = -3a^2/\sqrt{a^2+r^2}^5$

3.3.4: Potenciales de Lienard-Wiechert:

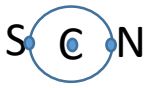


En la figura se muestran los siguientes puntos geométricos involucrados en el problema de una pequeña esfera cargada que se mueve a velocidad uniforme v_o a lo largo del eje $\hat{x}$.

- P(x,y,z,t) punto donde se evalúa el potencial electromagnético
- H proyección de P sobre el eje $\vec{x}$.
- q: posición instantánea del centro de la carga, abscisa $v_o.t$
- q': posición retardada del centro de la carga cuya contribución viaja a la velocidad 'c' y llega al punto de campo P en tiempo=t.

Los efectos relativistas no se basan únicamente en el retardo de propagación finito sino también en las diferencias de retardo entre distintas partes de la distribución de carga.
La integral volumétrica que define $\Phi(x,y,z,t)$ no es en una esfera sino en un elipsoide alargado en la dirección del movimiento.

Paso-1:
Identificar el volumen aparente donde hay que integrar

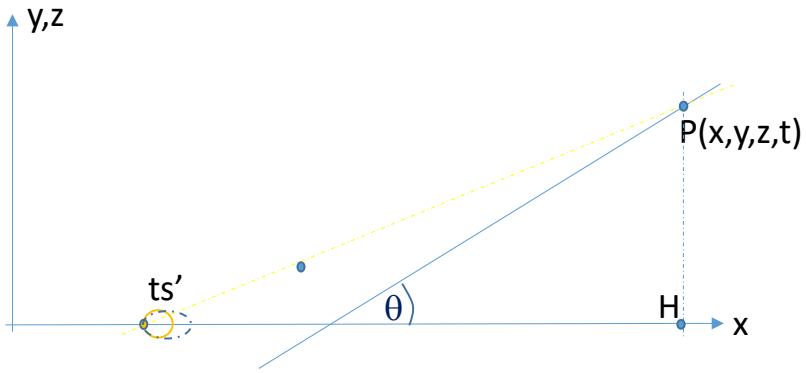


Marcamos 3 puntos representativos de la esfera:

- polo Norte ‘N’ es el del frente que se acerca al punto de campo ‘P’
- centro ‘C’
- polo Sur ‘S’

Luego imaginamos 3 tiempos anteriores al tiempo ‘t’ de evaluación del potencial:

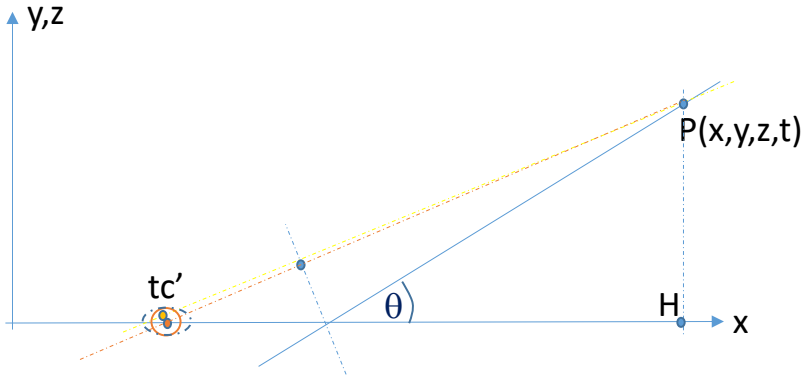
- t=t’s



En t=t’s la esfera cargada está en la posición amarilla y parte desde el polo Sur ‘S’ una especie de “fotón virtual” apuntando hacia P, transmitiendo la información de campo. Inventamos el nombre de “fotón virtual” porque sabemos que la Electrodinámica enseña que solo las cargas aceleradas irradian, por lo tanto no puede tratarse de un fotón real porque en ese caso transmitiría energía y cantidad de movimiento.

- t=t’c>t’s

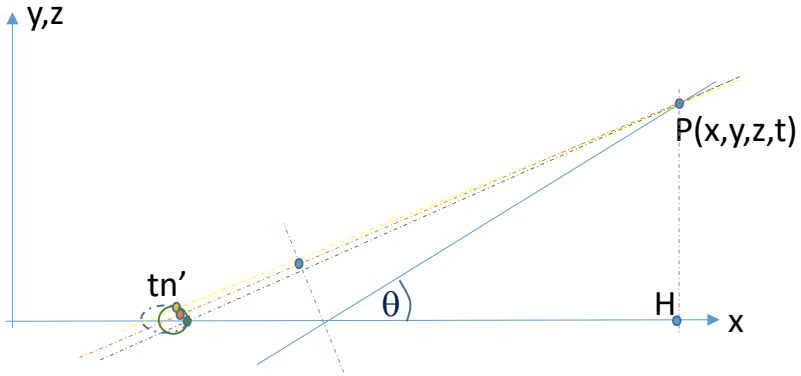
Transcurrió un pequeño tiempo desde el instante anterior, la esfera se desplazó hasta la posición marrón.



En este instante parte un fotón virtual desde el centro, marcado en marrón.
Ambos fotones, el amarillo del polo Sur y el marrón del centro, están a igual distancia de ‘P’.

- t=t’n>t’c>t’s

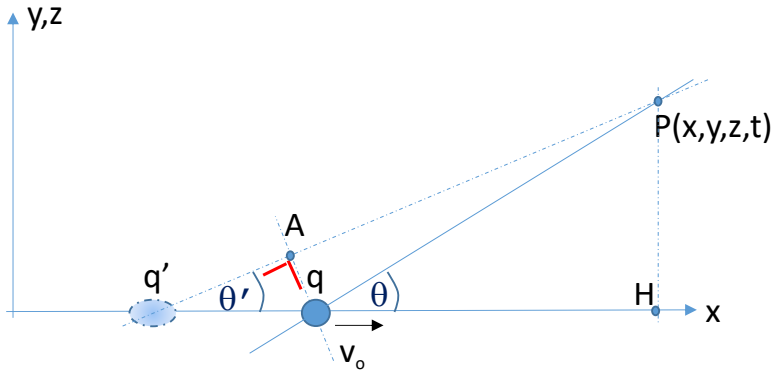
Transcurre otro tiempo, la esfera cargada se desplaza hasta la posición verde.



En este momento parte un fotón virtual desde el polo Norte marcado en verde, apuntando hacia P.
Viaja junto con el amarillo proveniente de 'S' y el marrón proveniente de 'N'.
Los 3 fotones llegan a 'P' en el mismo instante 't'.
No consideramos más puntos pero creemos que con 3 alcanza para adivinar la regla genérica:
Cuando 'P' suma todas sus contribuciones, ve que provienen de un volumen con forma elipsoidal.
El radio real r=a se transformó en un radio ampliado a'.
El incremento de tamaño aparente 2a'–2a es la distancia que se desplazó la carga (a velocidad v_o) durante el tiempo en que el fotón proveniente del punto más remoto 'S' (viajando a velocidad='c') tardó en acompasarse con el fotón proveniente del punto más cercano 'N'.
Las relaciones matemáticas son:

$c.(t'n–t's)=2.a'.\cos(\theta')$
$2a'–2a = v_o.(t'n–t's)= 2.v_o/c.a'.\cos(\theta')$
$a'–a = v_o/c.a'.\cos(\theta')$
$a'– v_o/c.a'.\cos(\theta') = a$
$a'.[1–v_o/c.\cos(\theta')] = a$
$a' = a / [1–v_o/c.\cos(\theta')]$

El elipsoide de revolución que se forma tiene radios menores inalterados b'=a, c'=a, solo se altera el radio mayor. El factor de amplificación del potencial es a'/a.
Advertencia: Todavía no aparece el γ de Lorentz, falta hacer algunos cálculos geométricos.



Paso-2:
El potencial que estamos buscando es $\Phi(x,y,z,t)=q /(R_t.4.\pi.\epsilon_o)/(1–v_o/c.\cos\theta')$

R_t = segm(P,q')= distancia a la posición retardada del centro de la carga
$(1–v_o/c.\cos\theta')$ = afectación por alargamiento aparente

En el denominador aparece entonces $R_t.(1–v_o/c.\cos\theta') = R_t – R_t.v_o/c.\cos\theta'$

$R_t/c = t_p$ = tiempo medio de propagación
$v_o.R_t/c = v_o.t_p$ = segm(q',q) desplazamiento horizontal de la carga durante ese tiempo
$segm(q',q).\cos\theta'=segm(q',A)$
→entonces $R_t.v_o/c.\cos\theta'=segm(q',A)$
Y $R_t – R_t.v_o/c.\cos\theta' = segm(q',P)–segm(q',A)=segm(A,P).$

Así que nos va quedando $\Phi(x,y,z,t)=q/[4.\pi.\epsilon_o\ segm(A,P)]$
Falta calcular ese segmento.

Paso-3:
En el triángulo rectángulo (q',P,Ĥ)

$segm(P,H)=segm(P,q').\sen\theta' = R_t.\sen\theta'$

En el triángulo rectángulo (q,P,Ĥ)

igual al anterior pero sin primas

$segm(P,H)=segm(P,q).\sen\theta = R_{inst}.\sen\theta=\sqrt{y^2+z^2}$

R_{inst} = segm(P,q)=distancia a la posición instantánea de la carga

$R_{inst}^2 = (x - v_o.t)^2+y^2+z^2$

En el triángulo(A,q,q')

segm(A,q)=$R_t.v_o/c.sen\theta'$ →sustituimos lo recién calculado

segm(A,q)=$R_{inst}.v_o/c.sen\theta$

segm(A,q)^2=$(v_o/c)^2.R_{inst}^2.sen^2\theta = (v_o/c)^2.(y^2+z^2)$

Por Pitágoras en el triángulo(Â,P,q)

segm(A,P)^2=segm(P,Q)^2–segm(A,q)^2

segm(A,P)^2=R_{inst}^2 – $(v_o/c)^2R_{inst}^2.sen^2\theta$

segm(A,P)^2=$(x - v_o.t)^2+y^2+z^2$ – $(v_o/c)^2.(y^2+z^2)$

segm(A,P)^2= $(x - v_o.t)^2+(1-v_o^2/c^2)(y^2+z^2)$

segm(A,P)^2 = $(1-v_o^2/c^2).[\gamma^2.(x - v_o.t)^2+ y^2+z^2]$

segm(A,P) = $\sqrt{1-v_o^2/c^2}\ .\sqrt{\gamma^2.(x - v_o.t)^2+ y^2+z^2}$

Aparece finalmente el factor 'γ' de Lorentz.

$\Phi(x,y,z,t)=q/[4.\pi.\epsilon_o.segm(A,P)]$

$$\Phi(x,y,z,t)=q.\gamma/[4.\pi.\epsilon_o\sqrt{\gamma^2.(x - v_o.t)^2+ y^2+z^2}\ ]$$

4.3: Adición relativista de velocidades:

Tenemos una partícula en movimiento rectilíneo uniforme, descrita según 2 referenciales en movimiento relativo.

$t= \gamma.(t' + v_o/c^2.x')$ $x=\gamma.(x'+v_o.t')$ $y=y'$ $z=z'$

Sustituimos $x'=u'_x.t'$ $y'=u'_y.t'$ $z'=u'_z.t'$

$t= \gamma.t'.(1 + u'_x v_o/c^2)$

$x=\gamma.t'.(u'_x+v_o)$

$y= u'_y.t'$

$z= u'_{yz}.t'$

Dividimos $u_x = x/t$

$u_x = [\ \gamma.t'.(u'_x+v_o)\ ]\ /[\ \gamma.t'.(1 + u'_x v_o/c^2)\ ]$

$u_x = (u'_x+v_o)/(1 + u'_x v_o/c^2)$

Dividimos $u_y = y/t$

$u_y = u'_y.t'\ /\ [\gamma.t'.(1 + u'_x v_o/c^2)]$

$u_y = u'_y/[\gamma.(1 + u'_x v_o/c^2)]$

Dividimos $u_z = z/t$

$u_z = u'_z.t'\ /\ [\gamma.t'.(1 + u'_x v_o/c^2)]$

$u_z = u'_z/[\gamma.(1 + u'_x v_o/c^2)]$

4.5.1: Transformación de Lorentz conserva métrica:

Debemos demostrar que [Jac*].[g].[Jac]=[g]

Organizamos las matrices 4x4 en base a bloques 2x2.

Algunos de ellos son triviales como la matriz identidad 2x2 [I] o la matriz nula 2x2 [0].

Otros no son tan triviales.

Tensor métrico de Minkowski:

$$[g] = \begin{bmatrix} [H] & [0] \\ [0] & [I] \end{bmatrix}$$

Bloque [H] 2x2

$$[H] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jacobiano de Lorentz:

$$[Jac] = \begin{bmatrix} [L] & [0] \\ [0] & [I] \end{bmatrix}$$

Bloque [L] de las coordenadas ct,x:

$$[L] = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{bmatrix}$$

		[H]	0	[L]	0
		0	[I]	0	[I]
[L*]	0	[L*].[H]	0	[L*].[H].[L]	0
0	[I]	0	[I]	0	[I]

El problema en 4 dimensiones [Jac*].[g].[Jac]se reduce a 2 dimensiones, a calcular [L*].[H].[L]

		−1	0	γ	γβ
		0	1	γβ	γ
γ	γβ	-γ	γβ	$-\gamma^2+\gamma^2\beta^2$	0
γβ	γ	-γβ	γ	0	$-\gamma^2\beta^2+\gamma^2$

Por definición vale $\gamma^2 = 1/(1-\beta^2)$, con lo cual queda demostrado que el resultado del doble producto matricial (bloque verde) es el mismo bloque [H] original con -1 en el casillero 00 y +1 en el casillero 11.

→ [L*].[H].[L]=[H]

5.1.1: Cuadrivector velocidad "bien variante":

La partícula móvil tiene distintos "gamma" según el referencial en que se describe:

γ_u en Σ, asociada a su velocidad coordenada $\vec{u}$.

γ'_u en Σ', asociada a su velocidad coordenada $\vec{u'}$.

Aparte hay un γ_o para aplicar el Lorentz del cambio de referencia entre Σ y Σ'.

Las respectivas cuadrivelocidades son:

$U^\alpha = \gamma_u.(c,\vec{u})$

$U'^\alpha = \gamma'_u.(c,\vec{u'})$

Si son realmente vectores contravariantes, deben cumplirse las siguientes relaciones:

$U^0 = \gamma_o.[U'^0 + v_o/c.U'^1]$

$U^1 = \gamma_o.[U'^1 + v_o/c.U'^0]$

$U^2 = U'^2$

$U^3 = U'^3$

$c\gamma_u = \gamma_o.[\, c\gamma'_u + v_o/c.\ \gamma'_u u'_x]$ $\qquad$ $\gamma_u = \gamma_o.\gamma'_u.[\, 1 + v_o.u'_x/c^2]$

$u_x\gamma_u = \gamma_o.[u'_x\gamma'_u + v_o/c.c\gamma'_u]$ $\qquad$ $u_x\gamma_u = \gamma_o.\gamma'_u.[u'_x + v_o]$

$u_y\gamma_u = u'_y\gamma'_u$

$u_z\gamma_u = u'_z\gamma'_u$

Las 2 ecuaciones resaltadas en verde las podemos dividir, y confirmamos que son compatibles con la adición de velocidades $u_x = (u'_x+v_o)/(1+v_o.u'_x/c^2)$

Las ecuaciones resaltadas en celeste requieren un análisis adicional. Recordemos de 4.3:

$u_y = u'_y/[\gamma_o.(1 + u'_x v_o/c^2)]$

$u_z = u'_z/[\gamma_o.(1 + u'_x v_o/c^2)]$

Multiplicamos por γ_u

$\gamma_u u_y = \gamma_u u'_y/[\gamma_o.(1 + u'_x v_o/c^2)]$

$\gamma_u u_z = \gamma_u u'_z/[\gamma_o.(1 + u'_x v_o/c^2)]$

Comparamos con las fórmulas celestes y llegamos a:

$\gamma'_u u'_y = \gamma_u u'_y/[\gamma_o.(1 + u'_x v_o/c^2)]$

$\gamma'_u = \gamma_u/[\gamma_o.(1 + u'_x v_o/c^2)]$

$\gamma'_u.\gamma_o.(1 + u'_x v_o/c^2) = \gamma_u$ ←Esto es lo que tenemos que demostrar a continuación:

$u^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2$

$u^2 = (u'_x+v_o)^2/(1+v_o.u'_x/c^2)^2 + u'_y{}^2/\gamma_o^2/(1 + u'_x v_o/c^2)^2 + u'_z{}^2/\gamma_o^2/(1 + u'_x v_o/c^2)^2$

$(1 + u'_x v_o/c^2)^2.u^2 = (u'_x+v_o)^2 + u'_y{}^2/\gamma_o^2 + u'_z{}^2/\gamma_o^2$ → factor común

$(1 + u'_x v_o/c^2)^2.u^2 = (u'_x+v_o)^2 + (u'_y{}^2+u'_z{}^2)/\gamma_o^2$ → dividimos entre c^2

$(1 + u'_x v_o/c^2)^2.u^2/c^2 = (u'_x+v_o)^2/c^2 + (u'_y{}^2+u'_z{}^2)/c^2/\gamma_o^2$

$(1 + u'_x v_o/c^2)^2.(-1+u^2/c^2 +1) = (u'_x+v_o)^2/c^2 + (u'_y{}^2+u'_z{}^2)/c^2/\gamma_o^2$ →sumamos y restamos 1

$(1 + u'_x v_o/c^2)^2.(-1+u^2/c^2 +1) = (u'_x+v_o)^2/c^2 + (u'_y{}^2+u'_z{}^2)/c^2/\gamma_o^2$

$(1 + u'_x v_o/c^2)^2(-1+u^2/c^2) + (1 + u'_x v_o/c^2)^2 = (u'_x+v_o)^2/c^2 + (u'_y{}^2+u'_z{}^2)/c^2/\gamma_o^2$

Antes de expandir los cuadrados para simplificar, llamamos K al factor verde y reconocemos γ_u.

$-K^2/\gamma_u^2 + (1 + u'_x v_o/c^2)^2 = (u'_x+v_o)^2/c^2 + (u'_y{}^2+u'_z{}^2)/c^2/\gamma_o^2$

$-K^2/\gamma_u^2 + 1 + 2.u'_x v_o/c^2 + u'_x{}^2 v_o^2/c^4 = u'_x{}^2/c^2 + 2v_o u'_x/c^2 + v_o^2/c^2 + (u'_y{}^2+u'_z{}^2)/c^2/\gamma_o^2$

$-K^2/\gamma_u^2 + 1 + 2.u'_x v_o/c^2 + u'_x{}^2 v_o^2/c^4 = u'_x{}^2/c^2 + 2v_o u'_x/c^2 + v_o^2/c^2 + (u'_y{}^2+u'_z{}^2)/c^2/\gamma_o^2$

$-K^2/\gamma_u^2 + 1 + u'_x{}^2 v_o^2/c^4 = u'_x{}^2/c^2 + v_o^2/c^2 + (u'_y{}^2+u'_z{}^2)/c^2/\gamma_o^2$

$-K^2/\gamma_u^2 + 1 = u'_x{}^2/c^2 - u'_x{}^2 v_o^2/c^4 + v_o^2/c^2 + (u'_y{}^2+u'_z{}^2)/c^2/\gamma_o^2$

$-K^2/\gamma_u^2 + 1 = u'_x{}^2/c^2(1-v_o^2/c^2) + v_o^2/c^2 + (u'_y{}^2+u'_z{}^2)/c^2/\gamma_o^2$

$-K^2/\gamma_u^2 + 1 = u'_x{}^2/c^2(1-v_o^2/c^2) + v_o^2/c^2 + (u'_y{}^2+u'_z{}^2)/c^2/\gamma_o^2$ →reconocemos γ_o^2

$-K^2/\gamma_u^2 + 1 = u'_x{}^2/c^2/\gamma_o^2 + v_o^2/c^2 + (u'_y{}^2+u'_z{}^2)/c^2/\gamma_o^2$

$-K^2/\gamma_u^2 + 1 = v_o^2/c^2 + (u'_x{}^2+u'_y{}^2+u'_z{}^2)/c^2/\gamma_o^2$ →reconocemos u'^2

$-K^2/\gamma_u^2 + 1 = v_o^2/c^2 + u'^2/c^2/\gamma_o^2$

$1 - v_o^2/c^2 - u'^2/c^2/\gamma_o^2 = K^2/\gamma_u^2$

$1/\gamma_o^2 - u'^2/c^2/\gamma_o^2 = K^2/\gamma_u^2$

$1/\gamma_o^2 - u'^2/c^2/\gamma_o^2 = K^2/\gamma_u^2$

$1/\gamma_o^2.(1-u'^2/c^2) = K^2/\gamma_u^2$

$1/\gamma_o^2/\gamma'_u{}^2) = K^2/\gamma_u^2$

$\gamma_u^2 = K^2.\gamma_o^2.\gamma'_u{}^2$

$\gamma_u = K.\gamma_o.\gamma'_u$

$\gamma_u = (1+u'_x v_o/c^2).\gamma_o.\gamma'_u$

5.2: Choque de bolas, masa relativista:

En la sección 5.2.2 llegábamos a una expresión tentativa para el cociente de masas en cuanto al "peso" relativo que tienen en la determinación del centro de masas: $m'_1/m'_2 = (1+v_o^2/c^2)/(1-v_o^2/c^2)$

Completamos ahora la demostración de que ese cociente coincide con la razón entre los factores gamma.

$\gamma'_1 = 1/\sqrt{1-u'_1{}^2/c^2}$ $\qquad$ $u'_1 = -2.v_o/(1+v_o^2/c^2)$

$\gamma'_2 = 1$ $\qquad$ $u'_2 = 0$

$u'_1{}^2 = 4.v_o^2/(1+v_o^2/c^2)^2$

$u'_1{}^2/c^2 = 4.v_o^2/c^2/(1+v_o^2/c^2)^2$

$1 - u'_1{}^2/c^2 = 1 - 4.v_o^2/c^2/(1+v_o^2/c^2)^2$

$(1+v_o^2/c^2)^2.(1 - u'_1{}^2/c^2) = (1+v_o^2/c^2)^2 - 4.v_o^2/c^2$ →expandimos cuadrado de binomio

$(1+v_o^2/c^2)^2.(1 - u'_1{}^2/c^2) = 1+2v_o^2/c^2+ v_o^4/c^4 - 4.v_o^2/c^2$

$(1+v_o^2/c^2)^2.(1 - u'_1{}^2/c^2) = 1-2v_o^2/c^2+ v_o^4/c^4$ →rearmamos cuadrado de otro binomio

$(1+v_o^2/c^2)^2.(1 - u'_1{}^2/c^2) = (1-v_o^2/c^2)^2$ →tomamos raíz cuadrada

$(1+v_o^2/c^2).\sqrt{1 - u'_1{}^2/c^2} = (1-v_o^2/c^2)$

$1 / \sqrt{1 - u'_1{}^2/c^2} = (1+v_o^2/c^2)/(1-v_o^2/c^2)$

5.4.3: Lagrangeano clásico:

La integral de acción clásica se escribe como $Acc=\int_{[to,t1]}\mathcal{L}(x,\dot{x},t).dt$

Sustituimos x(t) por una versión levemente perturbada →$x(t)+\delta x(t)$.

La velocidad también sufre una perturbación, que es derivada temporal de la perturbación de la trayectoria.

$\delta\dot{x} = d\delta x/dt$

El Lagrangeano y la integral de acción experimentan perturbaciones δAcc y $\delta\mathcal{L}$:

$\delta Acc=\int_{[to,t1]} \delta\mathcal{L}(x,\dot{x},t).dt$ →regla de la cadena

$\delta Acc=\int_{[to,t1]}\{\delta x(t).\partial\mathcal{L}/\partial x + \delta\dot{x}(t).\partial\mathcal{L}/\partial\dot{x}\}.dt$ →$\delta\dot{x}(t) = d(\delta x)/dt$

$\delta Acc=\int_{[to,t1]}\{\delta x(t).\partial\mathcal{L}/\partial x\}.dt + \int_{[to,t1]} d\delta x/dt.\partial\mathcal{L}/\partial\dot{x}\}.dt$

$\delta Acc=\int_{[to,t1]}\{\delta x(t).\partial\mathcal{L}/\partial x\}.dt + \int_{[to,t1]} d\delta x/dt.\partial\mathcal{L}/\partial\dot{x}\}.dt$ →integramos por partes

$\delta Acc=\int_{[to,t1]}\{\delta x(t).\partial\mathcal{L}/\partial x\}.dt + [\delta x.\partial\mathcal{L}/\partial\dot{x}]_{[to,t1]} - \int_{[to,t1]} \delta x(t).d/dt(\partial\mathcal{L}/\partial\dot{x})\}.dt$

El término sombreado en gris es nulo porque la perturbación δ(x) debe anularse en los extremos t_o,t_1.

$\delta Acc=\int_{[to,t1]}\{\delta x(t).\partial\mathcal{L}/\partial x\}.dt + 0 - \int_{[to,t1]} \delta x(t).d/dt(\partial\mathcal{L}/\partial\dot{x})\}.dt$

$\delta Acc=\int_{[to,t1]}\delta x(t).\{\partial\mathcal{L}/\partial x - d/dt(\partial\mathcal{L}/\partial\dot{x})\}.dt$

El Principio de Mínima Acción afirma que la trayectoria x(t), $\dot{x}(t)$ más probable es aquella que mantiene la acción estacionaria a primer orden en δx, cualquiera sea δx.

El requerimiento δAcc=0 ∀δx solo se cumple si se anula el factor marcado en rojo:

$d/dt(\partial\mathcal{L}/\partial\dot{x}) - \partial\mathcal{L}/\partial x = 0$

5.5.3: Fuerzas electromagnéticas:

Al aplicar el formalismo de Lagrange al cálculo de las fuerzas electromagnéticas, planteamos como ejercicio demostrar $\partial/\partial\dot{X}^h\ (U_\alpha U^\alpha) = 2.U_h$

En coordenadas cartesianas puede parecer algo trivial, pero el resultado es potente porque se generaliza a coordenadas arbitrarias.

$\partial/\partial U^h\ (U_\alpha U^\alpha)$ →regla de la cadena

$= \partial U_\alpha/\partial U^h.U^\alpha + U_\alpha.\partial U^\alpha/\partial U^h$ →delta Kronecker

$= \partial U_\alpha/\partial U^h.U^\alpha + U_\alpha.\delta Kron^\alpha{}_h$ →la suma en α colapsa en un único término

$= \partial U_\alpha/\partial U^h.U^\alpha + U_h$

$= \partial(U_\alpha)/\partial U^h.U^\alpha + U_h$ →expansión $U_\alpha=g_{\alpha\beta}U^\beta$

$= \partial(g_{\alpha\beta}U^\beta)/\partial U^h.U^\alpha + U_h$

$= g_{\alpha\beta}.\partial(U^\beta)/\partial U^h.U^\alpha + U_h$ →otra vez delta Kronecker

$= g_{\alpha\beta}.\delta Kron^\beta{}_h.U^\alpha + U_h$

$= g_{\alpha h}.U^\alpha + U_h$ →operación de bajada de índices

$= U_h + U_h$

$= 2.U_h$

5.6.5: Invariante electromagnético:

Multiplicamos matricialmente las 2 versiones del tensor de campo y luego tomamos traza (suma de elementos de la diagonal).

$Y_\lambda{}^\mu = F_{\lambda\alpha}F^{\alpha\mu}$

$Y = Y_\lambda{}^\lambda = F_{\lambda\alpha}F^{\alpha\lambda}$ →resultado de contraer $\mu=\lambda$

Queda una especie de "norma al cuadrado" o suma de cuadrados de los 16 casilleros, análogo a las normas de vectores.

Para ordenar los productos matriciales separamos en bloques que son:

* E* = vector eléctrico horizontal 1x3 (Ex,Ey,Ez)
* E = vector eléctrico vertical 3x1

[M] = matriz 3x3 antisimétrica con los componentes magnéticos

```
[M] =
      [0    +Bz   -By]
      [-Bz  0     +Bx]
      [+By  -Bx   0  ]
```

		0	E*/c
		–E/c	[M]
0	–E*/c	E^*E/c^2	$-E^*.[M]/c$
E/c	[M]	$-[M].E/c$	$E.E^*/c^2+[M]^2$

Verde = tensor covariante $F_{\lambda\alpha}$

Gris = tensor contravariante $F^{\alpha\mu}$

Celeste= producto $Y_\lambda{}^\mu$

E*E = multiplicados en ese orden (fila.x.columna) representan el producto escalar

E E*= multiplicados en el otro orden (columna.x.fila) dan el producto tensorial E⊗E, una matriz 3x3

Al contraer $Y_\lambda{}^\lambda$ solo importan los elementos de la diagonal.

Por el casillero 00 tenemos E^*E/c^2, o sea E^2/c^2.

Por la parte espacial tenemos E E* que es el producto tensorial E⊗E, cuyo elemento i,j es Ei.Ej.

En la diagonal aparecen Ex.Ex, Ey.Ey, Ez.Ez. O sea que también aporta un factor E^2 a la traza.

Falta calcular la matriz magnética al cuadrado.

```
                        [0          +Bz         -By         ]
                        [-Bz        0           +Bx         ]
                        [+By        -Bx         0           ]
[0    +Bz   -By]  [-By²-Bz²   Bx.By       Bx.Bz       ]
[-Bz  0     +Bx]  [-By.Bx     -Bz²-Bx²    By.Bz       ]
[+By  -Bx   0  ]  [Bz.Bx      Bz.By       -Bx²-By²    ]
```

Queda un producto tensorial B⊗B – B^2.[I].

Su traza es tr(B⊗B) – B^2.tr[I] = B^2 –$3B^2$ = –$2B^2$

Un cálculo explícito da $-B_y^2 - B_z^2$ $-B_z^2 - B_x^2$ $-B_x^2 - B_y^2$ = $-2B_x^2-2B_y^2-2B_z^2 = -2B^2$

El invariante queda, entonces, $F_{\lambda\alpha}F^{\alpha\lambda} = 2.(E^2/c^2 - B^2)$

A veces se expresa con los índices contravariantes cambiados, lo que repercute en un cambio de signo debido a la propiedad de antisimetría $F^{\alpha\lambda} = -F^{\lambda\alpha}$

$$F_{\lambda\alpha}F^{\lambda\alpha} = 2.(B^2 - E^2/c^2)$$

Curiosidad: Escrito así en este orden, parecería que es la suma de los productos casillero a casillero, muy similar al producto escalar de vectores pero ahora con 2 grados de libertad:
$F_{oo}.F^{oo} + F_{01}.F^{01} + \ldots + F_{32}.F^{32} + F_{33}.F^{33}$

6.4.3: Longitud propia en sistemas acelerados:

Las trayectorias de los extremos de la nave acelerada son:

piso: $x_0(t) = \sqrt{X_o^2 + c^2.t^2}$

techo: $x_H(t) = \sqrt{X_H^2 + c^2.t^2}$

Se suponen muy próximos $X_o \approx X_H$, tal que coinciden con buena precisión la media aritmética $X_m \approx (X_o+X_H)/2$ media geométrica $X_m \approx \sqrt{X_O.X_H}$

El factor γ_u promedio para la nave es $\gamma_u \approx \sqrt{1 + c^2.t^2/X_m^2}$

La evolución temporal de la distancia techo-piso es:

$l(t) = x_H(t) - x_0(t) = (x_H^2(t) - x_0^2(t)) / (x_H(t) + x_0(t)) =$

$l(t) = (X_H^2 - X_0^2)/(\sqrt{X_o^2 + c^2.t^2} + \sqrt{X_H^2 + c^2.t^2})$

Etapa inicial: Cuando la aceleración recién comienza y $ct \ll X_m$, aproximamos:

$l(t) = (X_H^2 - X_0^2)/(\sqrt{X_o^2 + c^2.t^2} + \sqrt{X_H^2 + c^2.t^2})$

$l(t) \approx (X_H^2 - X_0^2)/[X_o + c^2.t^2/(2X_o) + X_H + c^2.t^2/(2X_H)]$

$l(t) \approx (X_H^2 - X_0^2)/[X_o + X_H + c^2.t^2/2.(1/X_o + 1/X_H)]$

$l(t) \approx (X_H^2 - X_0^2)/[X_o + X_H + c^2.t^2.(X_o+X_H)/(2X_oX_H)]$

$l(t) \approx (X_H - X_0)/[1 + c^2.t^2/(2X_oX_H)]$

$l(t) \approx (X_H - X_0)/[1 + c^2.t^2/(2X_m^2)]$ $\rightarrow \gamma_u = \sqrt{1 + c^2.t^2/X_m^2} \approx 1 + \frac{1}{2}.c^2.t^2/X_m^2$

$l(t) \approx (X_H - X_0)/\gamma_u$

Etapa de transición: $ct \approx X_m$

$l(t) = (X_H^2 - X_0^2)/(\sqrt{X_o^2 + c^2.t^2} + \sqrt{X_H^2 + c^2.t^2})$

$l(t) \approx (X_H^2 - X_0^2)/(\sqrt{X_o^2 + X_m^2} + \sqrt{X_o^2 + X_m^2})$

$l(t) \approx (X_H^2 - X_0^2)/(X_m\sqrt{2} + X_m\sqrt{2})$

$l(t) \approx (X_H^2 - X_0^2)/(2X_m\sqrt{2})$

$l(t) \approx (X_H - X_0).(X_H + X_0)/(2X_m\sqrt{2})$

$l(t) \approx (X_H - X_0)/\sqrt{2}$ $\rightarrow \gamma_u = \sqrt{1 + c^2.t^2/X_m^2} \approx \sqrt{1 + X_m^2/X_m^2} \approx \sqrt{2}$

$l(t) \approx (X_H - X_0)/\gamma_u$

Etapa avanzada: Luego de transcurrido un tiempo suficiente $ct \gg X_m$, aproximamos:

$l(t) = (X_H^2 - X_0^2)/(\sqrt{X_o^2 + c^2.t^2} + \sqrt{X_H^2 + c^2.t^2})$

$l(t) \approx (X_H^2 - X_0^2)/(ct + ct)$

$l(t) \approx (X_H - X_0).(X_H + X_0)/(2ct)$

$l(t) \approx (X_H - X_0).X_m/(ct)$ $\rightarrow \gamma_u = \sqrt{1 + c^2.t^2/X_m^2} \approx c.t/X_m$

$l(t) \approx (X_H - X_0)/\gamma_u$

En todos los casos la longitud en el sistema Σ es la longitud propia contraída por factor γ_u.

6.7.1: Órbitas de Keppler en Relatividad:

$$\mathcal{L}(X^h,\dot{X}^h,\tau) = -m_o .c^2.\sqrt{\alpha(r).\dot{t}^2 -(\beta(r).\dot{r}^2 +r^2.\Omega^{\cdot 2})/c^2} \qquad \text{, siendo } \Omega^{\cdot 2} = \theta^{\cdot 2} + sen^2\theta.\varphi^{\cdot 2}$$

Al momento de proponer este ejercicio (capítulo 6) ya hay argumentos para conjeturar $\alpha(r)= 1 -2.M.G/(r.c^2)$. Pero todavía no hay argumentos para suponer $\beta(r)\neq 1$, así que comenzaremos con un análisis simplificado donde asumiremos $\beta\approx 1$ cuando sea necesario tomar el límite de los campos débiles.

Paso-1) Dada la simetría esférica, cualquier recta que pase por el centro del astro masivo 'M' puede oficiar de eje polar para medir θ. Elegimos entonces el eje polar de manera que el planeta orbite en el plano $\theta=\pi/2$.

$$\mathcal{L}(X^h,\dot{X}^h,\tau) = -m_o .c^2.\sqrt{\alpha(r).\dot{t}^2 -(\beta(r).\dot{r}^2 +r^2.\varphi^{\cdot 2})/c^2}$$

Paso-2) Conservación de la energía

$dP_{ct}/d\tau = \partial_t\mathcal{L}=0$

El momento temporal P_{ct} es constante porque $\partial_t\mathcal{L}=0$, el Lagrangeano no depende de la coordenada temporal. Esto arroja una constante del movimiento relacionada con la energía $P_{ct} = -E/c$.

$P_{ct} = \partial_{c\dot{t}}\,\mathcal{L} = 1/c.\partial_{\dot{t}}\,\mathcal{L}$

$P_{ct} = -m_o.c/(2\sqrt{\ }).2.\dot{t}.\alpha(r)$

$P_{ct} = -m_o.c.\dot{t}.\alpha(r)$

$-E/c = -m_o.c.\dot{t}.\alpha(r)$

$E = m_o.c^2.\dot{t}.\alpha(r)$

Paso-3) Conservación del momento angular

$dP_\varphi/d\tau = \partial_\varphi\mathcal{L}=0$

El momento P_φ es constante porque $\partial_\varphi\mathcal{L}=0$, el Lagrangeano no depende de la coordenada angular φ. Surge de esta simetría otra constante del movimiento.

$P_\varphi = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{\varphi} = L$

$L = -m_o.c^2/(2\sqrt{\ }).(-2r^2/c^2.\dot{\varphi})$

$L = m_o.\dot{\varphi}.r^2$

Paso-4) Fuerza gravitatoria radial

$\partial\mathcal{L}/\partial r = -m_o.c^2/(2\sqrt{\ }).[\ \alpha'(r).\dot{t}^2 -\beta'(r).\dot{r}^2/c^2 - 2.r/c^2.\dot{\varphi}^2\ ]$

$\partial\mathcal{L}/\partial r = m_o.[\ -c^2\alpha'(r)/2.\dot{t}^2 +\beta'(r)/2.\dot{r}^2 + r.\dot{\varphi}^2\ ]$ $\quad\rightarrow\alpha(r)=1-r_s/r;\ \alpha'(r)=r_s/r^2$

$\partial\mathcal{L}/\partial r = m_o.[\ -c^2.rs/r^2/2.\dot{t}^2 +\beta'(r)/2.\dot{r}^2 + r.\dot{\varphi}^2\ ]$

$\partial\mathcal{L}/\partial r = m_o.[\ -c^2.rs/r^2/2.\dot{t}^2 +\beta'(r)/2.\dot{r}^2 + r.\dot{\varphi}^2\ ]$ $\quad\rightarrow r_S=2MG/c^2$

$\partial\mathcal{L}/\partial r = m_o.[\ -MG/r^2.\dot{t}^2 +\beta'(r)/2.\dot{r}^2 + r.\dot{\varphi}^2\ ]$

$\partial\mathcal{L}/\partial r = m_o.[\ -MG/r^2.\dot{t}^2 +\beta'(r)/2.\dot{r}^2 + r.\dot{\varphi}^2\ ]$ $\quad\rightarrow$paso-3) $\dot{\varphi}=L/(m_o.r^2)$

$\partial\mathcal{L}/\partial r = m_o.[\ -MG/r^2.\dot{t}^2 +\beta'(r)/2.\dot{r}^2 + L^2/(m_o^2.r^3)\ ]$

Aproximamos para bajas velocidades y gravedades débiles $\quad\dot{t}\approx 1\ \beta'(r)=0$

$\partial\mathcal{L}/\partial r \approx m_o.[\ -MG/r^2.\dot{t}^2 +\beta'(r)/2.\dot{r}^2 + L^2/(m_o^2.r^3)\ ]$

$\partial\mathcal{L}/\partial r \approx m_o.[\ -MG/r^2 + L^2/(m_o^2.r^3)\ ]$

Paso-5) Cantidad de movimiento radial

$P_r = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{r}$

$P_r = -m_o.c^2/(2\sqrt{\ }).(-2\beta(r).\dot{r}/c^2)$

$P_r = m_o.\beta(r).\dot{r}$

$dP_r/d\tau = m_o.\beta'(r).\dot{r}^2 + m_o.\beta(r).\ddot{r}$ $\rightarrow \beta(r)\approx 1,\ \beta'(r)=0$

$dP_r/d\tau \approx m_o.\ddot{r}$

Formamos la ecuación de Euler-Lagrange aplicando el resultado del paso-4

$m_o.\ddot{r} \approx m_o.[\ -MG/r^2 + L^2/(m_o^2.r^3)\ ]$

$\ddot{r} \approx -MG/r^2 + L^2/(m_o^2.r^3)$

Paso-6) Cambio de variable

Ejecutamos el llamado "Cambio de Binet" $r(\tau)=1/u(\varphi)$

Derivamos $d/d\tau$:

$\dot{r}(\tau) = -1/u^2.\ u'(\varphi).\dot{\varphi}$ $\rightarrow$sustituimos paso-3

$\dot{r}(\tau) = -1/u^2.\ u'(\varphi).L/(m_o.r^2)$

$\dot{r}(\tau) = -u'(\varphi).L/(m_o.u^2.r^2)$ $\rightarrow r=1/u$

$\dot{r}(\tau) = -u'(\varphi).L/m_o$

Otra derivada $d/d\tau$:

$\ddot{r}(\tau) = -u''(\varphi).L/m_o\dot{\varphi}$

$\ddot{r}(\tau) = -u''(\varphi).L/m_oL/(m_o.r^2)$

$\ddot{r}(\tau) = -u''(\varphi).u^2.(L^2/m_o^2)$

Paso-7) Repetimos la sustitución de Binet para el lado derecho de Euler-Lagrange (paso-5)

$\ddot{r} \approx -MG/r^2 + L^2/(m_o^2.r^3)$

$-u''(\varphi).u^2.(L^2/m_o^2) \approx -MG.u^2 + u^3.L^2/(m_o^2)$

$-u''(\varphi).u^2.(L^2/m_o^2) \approx -MG.u^2 + u^3.L^2/(m_o^2)$ $\rightarrow$factor común u^2

$-u''(\varphi).(L^2/m_o^2) \approx -MG + u(\varphi).L^2/(m_o^2)$

$-u''(\varphi) \approx -MG.(m_o^2/L^2) + u(\varphi)$

$u''(\varphi) + u(\varphi) \approx MG.m_o^2/L^2$

Paso-8) Resolver la ecuación diferencial

Solución particular $u''=0;\ u'=0;\ u=cte=MG.m_o^2/L^2$

Solución homogénea: combinación de cos(φ), sen(φ)

Elegimos los ejes tal que $\varphi=0$ corresponde a uno de los vértices de la cónica en los que el movimiento es transversal al radio vector. Lo que repercute en que en ese vértice $u'(\varphi)=0$ y no hay componente sen(φ).

$u(\varphi) = K.\cos(\varphi) + MG.m_o^2/L^2$

Ajustamos condiciones iniciales en el vértice de la cónica.

Radio = r_o

Velocidad = v_o

Cantidad de movimiento= $m_o.v_o$

Momento de la cantidad de movimiento = $r_o.m_o.v_o = L$

$\rightarrow (L/m_o)=r_o.v_o$ $\rightarrow$sustituimos

$u(\varphi) = K.\cos(\varphi) + MG/(m_o^2/L^2)$

$u(\varphi) = K.\cos(\varphi) + MG/(r_o^2v_o^2)$

$u(0) = K + MG/(r_o^2v_o^2) = 1/r_o$

$\rightarrow K = 1/r_o - MG/(r_o^2v_o^2)$

$u(\varphi) = [1/r_o - MG/(r_o^2v_o^2)].\cos(\varphi) + MG/(r_o^2v_o^2)$

$u(\varphi) = MG/(r_o^2v_o^2).[v_o^2r_o/(MG) - 1].\cos(\varphi) + 1$

Paso-9) Deshacemos el cambio de Binet y reconocemos las trayectorias

$r=1/u$

$r(\varphi) = r_o^2 v_o^2/MG \,/\, \{\ 1 + [v_o^2 r_o/(MG) - 1].\cos(\varphi)\}$

$r(\varphi) = p \,/\, \{\ 1 + \epsilon.\cos(\varphi)\}$

Es la ecuación polar de una cónica con parámetro 'p' y excentricidad 'ϵ'

$p = r_o^2 v_o^2/MG$

$\epsilon = v_o^2 r_o/(MG) - 1$

Casos particulares:

- Circunferencia $\epsilon=0$

$v_o^2 r_o/(MG) = 1$

$v_o^2 r_o = MG$

$v_o^2/r_o = MG/r_o^2$

→Es la condición conocida para órbita circular, donde la fuerza gravitatoria es exactamente la centrípeta.
Excentricidad negativa $\epsilon<0$ no corresponde a una solución de curva cónica, sería el caso de un objeto celeste que no tiene velocidad suficiente como para orbitar y colapsa contra el astro atractor.

- Elipse $0 < \epsilon < 1$

La velocidad orbital es mayor a la requerida para una órbita circular, lo que implica que inicialmente el astro estudiado se va a alejar de la masa central M. Describirá una elipse cuyo perihelio es $\varphi=0$ $r=r_o$ (alejamiento mínimo) y su afelio (alejamiento máximo) ocurrirá en $\varphi=\pi$ con $r=r_{max}>r_o$.

- Parábola

  $\epsilon=1$

  $v_o^2 r_o/(MG) - 1 = 1$

  $v_o^2 r_o/(MG) = 2$

  $\frac{1}{2}. v_o^2 = MG/r_o$

  $\frac{1}{2}. v_o^2 - MG/r_o = 0$

  Energía-cinética + Energía-potencial = 0

→ Corresponde al caso límite del escape al infinito con energía cinética+potencial = 0

- Hipérbola

  $\epsilon > 1$

  El objeto celeste escapa completamente de la atracción de M con velocidad asintótica > 0.

Paso-10) Habiendo hecho este "entrenamiento" o "repaso" simplificado con $\alpha(r)\approx1$ y $\beta(r)\approx1$, podemos ahora animarnos a levantar las restricciones y aventurar una solución más "relativista".
El resultado es que la ecuación diferencial 7 se perturba y adquiere la forma:

$u''(\varphi) + Q.u'(\varphi)^2 + W^2.u(\varphi) \approx cte$

La presencia de ese Q con el término de primer orden hace que las soluciones ya no sean elipses.
Dado que $Q \ll 1$ porque contiene un factor $1/c^2$, podríamos en un principio desconsiderarlo.
Pero nos quedan soluciones homogéneas $\cos(W.\varphi)$, $\text{sen}(W.\varphi)$ con $W\neq1$
NO SON FUNCIONES UNIVALUADAS EN φ.
Al completar una revolución $\varphi=2\pi$ no se repite el valor que había en $\varphi=0$, el perihelio no se forma en el mismo sitio que antes.

7.1: Fuerza gravitomagnética:

Para simplificar los cálculos, elegimos para nuestra región de análisis un conjunto de ejes tales que 'z' es la dirección dominante de la gravedad. Llamamos *altura* a esa coordenada.

Por otro lado, nos movemos *horizontal* según-x para hacer aparecer una componente A_{gx} de potencial gravitomagnético.

El Lagrangeano simplificado es:

$$\mathcal{L}'(X^h,\dot{X}^h,\tau) = -m_o.c^2.\sqrt{(1+2\Phi_g/c^2).\dot{t}^2-1/c^2.(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)-4A_{gx}.\dot{x}.\dot{t}/c^2}$$

$\Phi_g(z)$, $A_{gx}(z)$ solo varían en la coordenada 'z'

Los momentos lagrangeanos son:

$P_x=\partial\mathcal{L}/\partial\dot{x} = m_o.(\dot{x} + 2.\dot{t}.A_{gx})$

$P_z=\partial\mathcal{L}/\partial\dot{z} = m_o.\dot{z}$

Las derivadas de $\mathcal{L}$ respecto a las coordenadas son:

$\partial\mathcal{L}/\partial x = 0$ por hipótesis simplificadora (nada depende de 'x')

$\partial\mathcal{L}/\partial z = m_o.(-\dot{t}^2.\partial\Phi_g/\partial z + 2.\dot{t}.\dot{x}.\partial A_{gx}/\partial z)$

Ecuación de Lagrange en 'x':

$dP_x/d\tau = \partial\mathcal{L}/\partial x$

$m_o.(\ddot{x} + 2.\dot{t}.\dot{z}.\partial A_{gx}/\partial z + 2.\ddot{t}.A_{gx}) = 0$ →aprox. $\dot{t}\approx 1$, $\ddot{t}\approx 0$

$m_o.(\ddot{x} + 2.\dot{t}.\dot{z}.\partial A_{gx}/\partial z) \approx 0$

$m_o.\ddot{x} \approx -2m_o.\dot{t}.\dot{z}.\partial A_{gx}/\partial z$

Reconocemos $\vec{B_g}=\nabla\wedge\vec{A_g} = \hat{y}.\partial A_{gx}/\partial z$ y sustituimos

$m_o.\ddot{x} \approx -2m_o.\dot{t}.\dot{z}.B_{gy}$

Ecuación de Lagrange en 'z':

$dP_z/d\tau = \partial\mathcal{L}/\partial z$

$m_o.\ddot{z} = -m_o.\dot{t}^2.\partial\Phi_g/\partial z + 2.m_o.\dot{t}.\dot{x}.\partial A_{gx}/\partial z$

$m_o.\ddot{z} = -m_o.\dot{t}^2.\partial\Phi_g/\partial z + 2.m_o.\dot{t}.\dot{x}.B_{gy}$

Llamamos fuerza gravitomagnética a todo lo que está causando aceleración y no es la fuerza gravitatoria clásica proporcional a $-\partial\Phi_{gx}/\partial z$.

$\vec{F_{gm}} = m_o.(\ddot{x}.\hat{x} + \ddot{z}.\hat{z})$

$\vec{F_{gm}} = 2m_o.\dot{t}.B_{gy}.(-\dot{z}.\hat{x} + \dot{x}.\hat{z})$ →sustituimos $\dot{x}=u_x.\dot{t}$, $\dot{z}=u_z.\dot{t}$

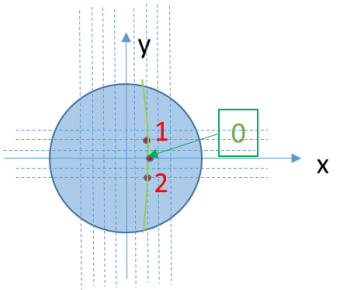
$\vec{F_{gm}} = 2m_o.\dot{t}^2.B_{gy}.(-u_z.\hat{x} + u_x.\hat{z})$ →reconocemos $\vec{u}=u_x.\hat{x}+u_y.\hat{y}+u_z.\hat{z}$

$\vec{F_{gm}} = 2m_o.\dot{t}^2.(\vec{u}\wedge\vec{B_g})$

Resulta ser muy similar a la electromagnética de Lorentz, pero con factor 2.

Y un factor $\dot{t}^2$ que es poco significativo en el régimen de campos débiles.

7.4: Geodésica en un casquete esférico:



Estudiamos el arco geodésico que une los puntos '1' y '2', llamamos '0' al punto de corte con el eje y=0

$x_o=a$ $\dot{x}=0$

$y_o=0$ $\dot{y}=1$

Observación: 'a' es numéricamente muy parecido a la coordenada 'h' de los puntos '1' y '2', pero no es exactamente igual porque la trayectoria es curva (sería igual si la trayectoria fuera una recta).

Para la métrica en el "polo" del casquete esférico utilizamos la parametrización por longitud de arco 's'.

$(dS) \approx \sqrt{\{\ \dot{x}^2.[1+x^2/R_c^2] + 2.\dot{x}.\dot{y}.xy/R_c^2 + \dot{y}^2.[1 + y^2/R_c^2]\ \}}\ .ds$

$\dot{x}=dx/ds$, derivada respecto a la longitud de arco

$\dot{y}=dy/ds$

El Lagrangeano es $\mathcal{L} = \sqrt{\ }$, con la condición de normalización $\sqrt{\ }=1$ (dS=ds).

En el entorno del punto '0', $\dot{x}=0$ y=0, lo que significa $dS=\dot{y}.ds$ $\rightarrow \dot{y}=1.$

El momento lagrangeano en 'x' vale:

$P_x = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{x} = \dot{x}.(1+x^2/R_c^2) + \dot{y}.xy/R_c^2$

Su derivada d/ds ("aceleración") es:

$dP_x/ds = \ddot{x}.(1+x^2/R_c^2) + 2.\dot{x}^2.x/Rc^2 + \ddot{y}.xy/R_c^2 + \dot{y}^2.x/R_c^2 + \dot{y}.\dot{x}.y/R_c^2$

Por otro lado, tenemos

$\partial\mathcal{L}/\partial x = x.\ \dot{x}^2/R_c^2 + \dot{x}.\dot{y}.y/R_c^2$

La ecuación variacional de Euler-Lagrange establece que:

$dP_x/ds = \partial\mathcal{L}/\partial x$

$\ddot{x}.(1+x^2/R_c^2) + 2.\dot{x}^2.x/R_c^2 + \ddot{y}.xy/R_c^2 + \dot{y}^2.x/R_c^2 + \dot{y}.\dot{x}.y/R_c^2 = x.\ \dot{x}^2/R_c^2 + \dot{x}.\dot{y}.y/R_c^2$

$\ddot{x}.(1+x^2/R_c^2) + \dot{x}^2.x/R_c^2 + \ddot{y}.xy/R_c^2 + \dot{y}^2.x/R_c^2 + \dot{y}.\dot{x}.y/R_c^2 = \dot{x}.\dot{y}.y/R_c^2$

Conservamos solo los términos significativos en el entorno del punto de corte '0', descartando como infinitésimo de orden superior todo lo que tiene y=0, $\dot{x}=0$

$\ddot{x}.(1+x^2/R_c^2) + \dot{x}^2.x/R_c^2 + \ddot{y}.xy/R_c^2 + \dot{y}^2.x/R_c^2 + \dot{y}.\dot{x}.y/R_c^2 = \dot{x}.\dot{y}.y/R_c^2$

$\ddot{x}.(1+x^2/R_c^2) + \dot{y}^2.x/R_c^2 \approx 0$

$\ddot{x}.(1+x^2/R_c^2) \approx -\dot{y}^2.x/R_c^2$

Está quedando una expresión muy similar a la aceleración centrípeta de un arco perpendicular al eje $\vec{x}$. La derivada segunda de 'x' cumple el rol de aceleración, y el término proporcional al cuadrado de la velocidad ($\dot{y}^2$) cumple el rol de una fuerza centrípeta que atrae la curva hacia un hipotético centro de giro ubicado a la izquierda en el dibujo, en una abscisa remota (remota porque el radio de curvatura es muy grande de acuerdo con las simplificaciones asumidas de métrica cuasi-euclídea).

En el entorno del punto de corte '0' esto se puede simplificar con $x \approx a$ $\dot{y} \approx 1$:

$\ddot{x}.(1+a^2/R_c^2) \approx -a/R_c^2$

$\ddot{x}(s) \approx -a/R_c^2/(1+a^2/R_c^2)$ $\rightarrow$se integra 2 veces

$x(s) \approx x(0) - a.s^2/2/R_c^2/(1+a^2/R_c^2)$ $\rightarrow x(0)=a$

$x(s) \approx a - a.s^2/2/R_c^2/(1+a^2/R_c^2)$

$y(s) \approx s$ $\rightarrow$ porque $\dot{y} \approx 1$ significa $dy/ds=1$ $\rightarrow y=s$

Eliminando el parámetro 's' de la curva parametrizada nos queda un arco de parábola en el plano 'xy'.

$x \approx a - a.y^2/2/R_c^2/(1+a^2/R_c^2)$

El radio de curvatura vale $R_c^2/a/(1+a^2/R_c^2)$, decrece al aumentar 'a' (lo que implica curvatura más notoria).

8.4: Otras derivadas covariantes:

Ejemplo: derivada de un vector covariante $\nabla_\alpha A_\mu$.

Subimos índices y aplicamos la fórmula conocida para vector contravariante. Luego bajamos índices.

$A_\mu = g_{\mu\lambda}A^\lambda$

$\nabla_\alpha A_\mu = \nabla_\alpha (g_{\mu\lambda}A^\lambda)$ $\rightarrow$la métrica entra y sale libremente de la derivada covariante

$\nabla_\alpha A_\mu = g_{\mu\lambda}(\nabla_\alpha A^\lambda)$

$\nabla_\alpha A_\mu = g_{\mu\lambda}(\nabla_\alpha A^\lambda)$ $\rightarrow$fórmula conocida para vector contravariante

$\nabla_\alpha A_\mu = g_{\mu\lambda}.(\partial_\alpha A^\lambda + \Gamma^\lambda_{\alpha\sigma}A^\sigma)$

$\nabla_\alpha A_\mu = g_{\mu\lambda}.(\partial_\alpha A^\lambda + \Gamma^\lambda_{\alpha\sigma}A^\sigma)$

$\nabla_\alpha A_\mu = g_{\mu\lambda}.(\partial_\alpha A^\lambda) + g_{\mu\lambda}.\Gamma^\lambda{}_{\alpha\sigma}A^\sigma$ →reconocemos Christoffel de 1ra Especie

$\nabla_\alpha A_\mu = g_{\mu\lambda}.(\partial_\alpha A^\lambda) + \Gamma_{\mu,\alpha\sigma}A^\sigma$ →σ=índice dummy, se puede renombrar

$\nabla_\alpha A_\mu = g_{\mu\lambda}.(\partial_\alpha A^\lambda) + \Gamma_{\mu,\alpha\lambda}A^\lambda$ →hacemos aparecer derivada de producto

$\nabla_\alpha A_\mu = \partial_\alpha(g_{\mu\lambda}A^\lambda) - \partial_\alpha(g_{\mu\lambda})A^\lambda + \Gamma_{\mu,\alpha\lambda}A^\lambda$

$\nabla_\alpha A_\mu = \partial_\alpha(g_{\mu\lambda}A^\lambda) - \partial_\alpha(g_{\mu\lambda})A^\lambda + \Gamma_{\mu,\alpha\lambda}A^\lambda$ →reconocemos bajada de índice

$\nabla_\alpha A_\mu = \partial_\alpha A_\mu - \partial_\alpha(g_{\mu\lambda})A^\lambda + \Gamma_{\mu,\alpha\lambda}A^\lambda$ →factor común

$\nabla_\alpha A_\mu = \partial_\alpha A_\mu + (-\partial_\alpha(g_{\mu\lambda}) + \Gamma_{\mu,\alpha\lambda})A^\lambda$

Expandimos el símbolo de Christoffel de 1ra especie según su definición:

$\nabla_\alpha A_\mu = \partial_\alpha A_\mu + (-\partial_\alpha(g_{\mu\lambda}) + \Gamma_{\mu,\alpha\lambda})A^\lambda$

$\nabla_\alpha A_\mu = \partial_\alpha A_\mu + [-\partial_\alpha(g_{\mu\lambda}) + \tfrac{1}{2}.\partial_\alpha(g_{\mu\lambda}) + \tfrac{1}{2}.\partial_\lambda(g_{\mu\alpha}) - \tfrac{1}{2}.\partial_\mu(g_{\alpha\lambda})]A^\lambda$

$\nabla_\alpha A_\mu = \partial_\alpha A_\mu + [-\partial_\alpha(g_{\mu\lambda}) + \tfrac{1}{2}.\partial_\alpha(g_{\mu\lambda}) + \tfrac{1}{2}.\partial_\lambda(g_{\mu\alpha}) - \tfrac{1}{2}.\partial_\mu(g_{\alpha\lambda})]A^\lambda$

$\nabla_\alpha A_\mu = \partial_\alpha A_\mu + [-\tfrac{1}{2}\partial_\alpha(g_{\mu\lambda}) + \tfrac{1}{2}.\partial_\lambda(g_{\mu\alpha}) - \tfrac{1}{2}.\partial_\mu(g_{\alpha\lambda})]A^\lambda$

$\nabla_\alpha A_\mu = \partial_\alpha A_\mu + [-\tfrac{1}{2}\partial_\alpha(g_{\mu\lambda}) - \tfrac{1}{2}.\partial_\mu(g_{\alpha\lambda}) + \tfrac{1}{2}.\partial_\lambda(g_{\mu\alpha})]A^\lambda$

$\nabla_\alpha A_\mu = \partial_\alpha A_\mu - [\tfrac{1}{2}\partial_\alpha(g_{\mu\lambda}) + \tfrac{1}{2}.\partial_\mu(g_{\alpha\lambda}) - \tfrac{1}{2}.\partial_\lambda(g_{\mu\alpha})]A^\lambda$

$\nabla_\alpha A_\mu = \partial_\alpha A_\mu - [\Gamma_{\lambda,\,\mu\alpha}]A^\lambda$

$\nabla_\alpha A_\mu = \partial_\alpha A_\mu - [\Gamma_{\lambda,\,\mu\alpha}]A^\lambda$ →bajamos índice del vector

$\nabla_\alpha A_\mu = \partial_\alpha A_\mu - A_\rho g^{\rho\lambda}[\Gamma_{\lambda,\,\mu\alpha}]$

$\nabla_\alpha A_\mu = \partial_\alpha A_\mu - A_\rho g^{\rho\lambda}[\Gamma_{\lambda,\,\mu\alpha}]$ →subimos índice al Christoffel

$\nabla_\alpha A_\mu = \partial_\alpha A_\mu - A_\rho\, \Gamma^\rho{}_{\mu\alpha}$

$$\nabla_\alpha A_\mu = \partial_\alpha A_\mu - A_\rho\, \Gamma^\rho{}_{\mu\alpha}$$

Queda una fórmula muy parecida a la de vectores contravariantes, salvo el signo cambiado.

<u>Demostración alternativa</u>:

Usamos la definición 8.3.4: derivada covariante de un vector es la proyección de su gradiente sobre nuestros vectores base. Según si usamos los vectores base o los duales, los índices nos quedan altos o bajos.

$\nabla_\alpha A_\mu = \vec{E_\alpha}\cdot\nabla\vec{A}\cdot\vec{E_\mu}$ → $\vec{E_\alpha}\cdot\nabla=\partial_\alpha$ derivada direccional

$\nabla_\alpha A_\mu = \partial_\alpha\, \vec{A}\cdot\vec{E_\mu}$

$\nabla_\alpha A_\mu = \partial_\alpha\, \vec{A}\cdot\vec{E_\mu}$ →expandimos $\vec{A}$ en sus componentes covariantes y vectores duales $(A_\beta\tilde{E}^\beta)$

$\nabla_\alpha A_\mu = \partial_\alpha\, (A_\beta\tilde{E}^\beta)\cdot\vec{E_\mu}$ →derivada del producto

$\nabla_\alpha A_\mu = \partial_\alpha\, (A_\beta)\tilde{E}^\beta\cdot\vec{E_\mu} + A_\beta\partial_\alpha\, (\tilde{E}^\beta)\cdot\vec{E_\mu}$

$\nabla_\alpha A_\mu = \partial_\alpha\, (A_\beta)\tilde{E}^\beta\cdot\vec{E_\mu} + A_\beta\partial_\alpha\, (\tilde{E}^\beta)\cdot\vec{E_\mu}$

$\nabla_\alpha A_\mu = \partial_\alpha\, (A_\beta)\delta Kron^\beta{}_\mu + A_\beta\partial_\alpha\, (\tilde{E}^\beta)\cdot\vec{E_\mu}$

$\nabla_\alpha A_\mu = \partial_\alpha\, (A_\mu) + A_\beta\partial_\alpha\, (\tilde{E}^\beta)\cdot\vec{E_\mu}$ →hacemos aparecer derivada de producto

$\nabla_\alpha A_\mu = \partial_\alpha\, (A_\mu) + A_\beta[\partial_\alpha\, (\tilde{E}^\beta\cdot\vec{E_\mu}) - \tilde{E}^\beta\cdot\partial_\alpha\vec{E_\mu}]$

$\nabla_\alpha A_\mu = \partial_\alpha\, (A_\mu) + A_\beta[\partial_\alpha\, (\tilde{E}^\beta\cdot\vec{E_\mu}) - \tilde{E}^\beta\cdot\partial_\alpha\vec{E_\mu}]$

$\nabla_\alpha A_\mu = \partial_\alpha\, (A_\mu) + A_\beta[0 - \tilde{E}^\beta\cdot\partial_\alpha\vec{E_\mu}]$

$\nabla_\alpha A_\mu = \partial_\alpha\, (A_\mu) - A_\beta[\tilde{E}^\beta\cdot\partial_\alpha\vec{E_\mu}]$ →Reconocemos Christoffel

$\nabla_\alpha A_\mu = \partial_\alpha\, (A_\mu) - A_\beta[\Gamma^\beta{}_{\alpha\mu}]$

$$\nabla_\alpha A_\mu = \partial_\alpha A_\mu - A_\beta\, \Gamma^\beta{}_{\alpha\mu}$$

<u>Otro ejemplo</u>: derivada de un tensor.

Utilizamos el caso particular de un tensor construido como producto tensorial, para "adivinar" cuál es la fórmula general que va a aplicar a cualquier tensor (no necesariamente construible como producto tensorial de vectores).

$T^{\lambda\mu} = A^\lambda B^\mu$ →aplicamos derivada de producto

$\nabla_\alpha T^{\lambda\mu} = (\nabla_\alpha A^\lambda)B^\mu + A^\lambda(\nabla_\alpha B^\mu)$ →expandimos cada derivada covariante

$\nabla_\alpha T^{\lambda\mu} = (\partial_\alpha A^\lambda + \Gamma^\lambda{}_{\alpha\beta}A^\beta)B^\mu + A^\lambda(\partial_\alpha B^\mu + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}B^\beta)$

$\nabla_\alpha T^{\lambda\mu} = (\partial_\alpha A^\lambda)B^\mu + \Gamma^\lambda{}_{\alpha\beta}A^\beta B^\mu + A^\lambda(\partial_\alpha B^\mu) + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}A^\lambda B^\beta$ →reconocemos derivada de producto

$\nabla_\alpha T^{\lambda\mu} = \partial_\alpha(A^\lambda B^\mu) + \Gamma^\lambda{}_{\alpha\beta}A^\beta B^\mu + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}A^\lambda B^\beta$

$\nabla_\alpha T^{\lambda\mu} = \partial_\alpha(A^\lambda B^\mu) + \Gamma^\lambda{}_{\alpha\beta}A^\beta B^\mu + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}A^\lambda B^\beta$ →expresamos según tensor original

$\nabla_\alpha T^{\lambda\mu} = \partial_\alpha(T^{\lambda\mu}) + \Gamma^\lambda{}_{\alpha\beta}T^{\beta\mu} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}T^{\lambda\beta}$

$$\nabla_\alpha T^{\lambda\mu} = \partial_\alpha(T^{\lambda\mu}) + \Gamma^\lambda{}_{\alpha\beta}T^{\beta\mu} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}T^{\lambda\beta}$$

8.5: Símbolos de Christoffel:

Hay 2 definiciones alternativas:

- Curvas sobre superficies (D1): $\tilde{E}^\mu \cdot \partial_\alpha \vec{E_\beta}$
- Fuerzas gravitatorias: (D2) $g^{\mu\lambda}.\Gamma_{\lambda,\alpha\beta}$

Para demostrar que ambas definiciones son equivalentes, partimos de (D1) y expresamos los vectores duales como el resultado de subir índice $\tilde{E}^\mu = g^{\mu\lambda}\vec{E_\lambda}$

(D1) = $\tilde{E}^\mu \cdot \partial_\alpha \vec{E_\beta}$

(D1) = $g^{\mu\lambda}\vec{E_\lambda} \cdot \partial_\alpha \vec{E_\beta}$

Usamos las propiedades de simetría para sustituir $\partial_\alpha \vec{E_\beta} = \frac{1}{2}(\partial_\alpha \vec{E_\beta} + \partial_\beta \vec{E_\alpha})$
(es sumar 2 veces lo mismo y luego promediar)

(D1) = $g^{\mu\lambda}\vec{E_\lambda} \cdot \partial_\alpha \vec{E_\beta}$

(D1) = $g^{\mu\lambda}\vec{E_\lambda} \cdot \frac{1}{2}(\partial_\alpha \vec{E_\beta} + \partial_\beta \vec{E_\alpha})$

(D1) = $\frac{1}{2}.g^{\mu\lambda}\vec{E_\lambda} \cdot (\partial_\alpha \vec{E_\beta} + \partial_\beta \vec{E_\alpha})$

Ahora hacemos aparecer las derivadas de productos, como si integráramos por partes:

(D1) = $\frac{1}{2}.g^{\mu\lambda}.(\vec{E_\lambda} \cdot \partial_\alpha \vec{E_\beta} + \vec{E_\lambda} \cdot \partial_\beta \vec{E_\alpha})$

(D1) = $\frac{1}{2}.g^{\mu\lambda}.[\partial_\alpha(\vec{E_\lambda} \cdot \vec{E_\beta}) - \vec{E_\beta} \cdot \partial_\alpha \vec{E_\lambda} + \partial_\beta(\vec{E_\lambda} \cdot \vec{E_\alpha}) - \vec{E_\alpha} \cdot \partial_\beta \vec{E_\lambda}]$

(D1) = $\frac{1}{2}.g^{\mu\lambda}.[\partial_\alpha(\vec{E_\lambda} \cdot \vec{E_\beta}) + \partial_\beta(\vec{E_\lambda} \cdot \vec{E_\alpha}) - \vec{E_\beta} \cdot \partial_\alpha \vec{E_\lambda} - \vec{E_\alpha} \cdot \partial_\beta \vec{E_\lambda}]$

Volvemos a aplicar simetría de índices:

(D1) = $\frac{1}{2}.g^{\mu\lambda}.[\partial_\alpha(\vec{E_\lambda} \cdot \vec{E_\beta}) + \partial_\beta(\vec{E_\lambda} \cdot \vec{E_\alpha}) - \vec{E_\beta} \cdot \partial_\alpha \vec{E_\lambda} - \vec{E_\alpha} \cdot \partial_\beta \vec{E_\lambda}]$

(D1) = $\frac{1}{2}.g^{\mu\lambda}.[\partial_\alpha(\vec{E_\lambda} \cdot \vec{E_\beta}) + \partial_\beta(\vec{E_\lambda} \cdot \vec{E_\alpha}) - \vec{E_\beta} \cdot \partial_\lambda \vec{E_\alpha} - \vec{E_\alpha} \cdot \partial_\lambda \vec{E_\beta}]$

Reconocemos una derivada de producto:

(D1) = $\frac{1}{2}.g^{\mu\lambda}.[\partial_\alpha(\vec{E_\lambda} \cdot \vec{E_\beta}) + \partial_\beta(\vec{E_\lambda} \cdot \vec{E_\alpha}) - \vec{E_\beta} \cdot \partial_\lambda \vec{E_\alpha} - \vec{E_\alpha} \cdot \partial_\lambda \vec{E_\beta}]$

(D1) = $\frac{1}{2}.g^{\mu\lambda}.[\partial_\alpha(\vec{E_\lambda} \cdot \vec{E_\beta}) + \partial_\beta(\vec{E_\lambda} \cdot \vec{E_\alpha}) - \partial_\lambda(\vec{E_\alpha} \cdot \vec{E_\beta})]$

Finalmente, identificamos los productos escalares de las parejas de vectores base con los coeficientes del tensor métrico:

(D1) = $\frac{1}{2}.g^{\mu\lambda}.[\partial_\alpha(\vec{E_\lambda} \cdot \vec{E_\beta}) + \partial_\beta(\vec{E_\lambda} \cdot \vec{E_\alpha}) - \partial_\lambda(\vec{E_\alpha} \cdot \vec{E_\beta})]$

(D1) = $\frac{1}{2}.g^{\mu\lambda}.[\partial_\alpha(g_{\lambda\beta}) + \partial_\beta(g_{\lambda\alpha}) - \partial_\lambda(g_{\alpha\beta})]$

(D1) = $g^{\mu\lambda}.\frac{1}{2}.[\partial_\alpha(g_{\lambda\beta}) + \partial_\beta(g_{\lambda\alpha}) - \partial_\lambda(g_{\alpha\beta})]$

(D1) = $g^{\mu\lambda}.\Gamma_{\lambda,\alpha\beta}$ →aparece el Christoffel de 1ra especie con índice subido

(D1) = (D2)

8.5: Christoffel y determinante del tensor métrico:

$$\Gamma^\beta{}_{\beta\alpha} = 1/\sqrt{g}\ .\partial_\alpha(\sqrt{g}\ )$$

Esta relación útil nos proponemos demostrarla en el caso particular de un tensor métrico diagonal

α\β	u	v	w	.
u	g_{uu}	0	0	]

$$\begin{matrix} v & | & 0 & g_{vv} & 0 &] \\ \omega & | & 0 & 0 & g_{ww} &] \end{matrix}$$

determinante $g=g_{uu}.g_{vv}.g_{ww}$

Partimos de la definición:

$$\Gamma^{\lambda}_{\beta\alpha} = \tfrac{1}{2}.g^{\rho\lambda}.(\partial_\beta g_{\rho\alpha} + \partial_\alpha g_{\beta\rho} - \partial_\rho g_{\alpha\beta})$$

Lo anterior es una suma implícita en ρ.

Para tensor métrico diagonal, el único término no nulo de la suma ocurre en ρ=λ.

$$\Gamma^{\lambda}_{\beta\alpha} = \tfrac{1}{2}.g^{\lambda\lambda}.(\partial_\beta g_{\lambda\alpha} + \partial_\alpha g_{\beta\lambda} - \partial_\lambda g_{\alpha\beta})$$

Advertencia sobre la notación: El doble índice en $g^{\lambda\lambda}$ no está indicando una contracción, las contracciones tensoriales tienen sentido cuando se compensa un índice bajo con un índice alto.

Ahora sí ejecutamos una contracción al igualar λ=β y sumar en β:

$$\Gamma^{\beta}_{\beta\alpha} = \tfrac{1}{2}.g^{\beta\beta}.(\partial_\beta g_{\beta\alpha} + \partial_\alpha g_{\beta\beta} - \partial_\beta g_{\alpha\beta})$$

$$\Gamma^{\beta}_{\beta\alpha} = \tfrac{1}{2}.g^{\beta\beta}.\partial_\alpha g_{\beta\beta} \qquad \rightarrow \text{hay suma implícita en } \beta\text{, la expandimos en forma explícita}$$

$$\Gamma^{\beta}_{\beta\alpha} = \tfrac{1}{2}.[g^{uu}.\partial_\alpha g_{uu} + g^{vv}.\partial_\alpha g_{vv} + g^{ww}.\partial_\alpha g_{ww}]$$

La suposición de tensor diagonal implica que su inversa también es diagonal y vale: $g^{\beta\beta}=1/g_{\beta\beta}\ \forall\beta$.

$$\Gamma^{\beta}_{\beta\alpha} = \tfrac{1}{2}.[(\partial_\alpha g_{uu})/g_{uu} + (\partial_\alpha g_{vv})/g_{vv} + (\partial_\alpha g_{ww})/g_{ww}]$$

$$\Gamma^{\beta}_{\beta\alpha} = \tfrac{1}{2}.[\partial_\alpha \ln(g_{uu}) + \partial_\alpha \ln(g_{vv}) + \partial_\alpha \ln(g_{ww})] \qquad \rightarrow \text{derivada de logaritmo}$$

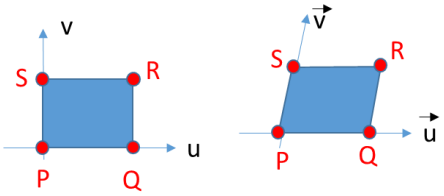
$$\Gamma^{\beta}_{\beta\alpha} = \tfrac{1}{2}.\partial_\alpha[\ln(g_{uu}) + \ln(g_{vv}) + \ln(g_{ww})] \qquad \rightarrow \text{logaritmo de un producto}$$

$$\Gamma^{\beta}_{\beta\alpha} = \tfrac{1}{2}.\partial_\alpha[\ln(g_{uu}.g_{vv}.g_{ww})] \qquad \rightarrow \text{determinante } g=guu.gvv.gww$$

$$\Gamma^{\beta}_{\beta\alpha} = \tfrac{1}{2}.\partial_\alpha[\ln(g)] \qquad \rightarrow \text{logaritmo de una potencia}$$

$$\Gamma^{\beta}_{\beta\alpha} = \partial_\alpha[\ln(\sqrt{g})]$$

9.1: Tensor de Riemann y transporte paralelo:



Retomamos la figura del paraboloide de Riemann, pero ahora aplicada a superficies genéricas y a vectores genéricos (no necesariamente ortogonales ni coincidentes con los vectores base).

- P,Q,R,S son 4 puntos vecinos, muy próximos, tales que la métrica varía muy poco en el entorno
- $\vec{u}$=Q-P, $\vec{v}$=S-P son 2 vectores de tamaño chico que definen los desplazamientos

Sus respectivas componentes contravariantes son U^α V^β

- $\vec{A}$ es un campo vectorial con componentes contravariantes A^λ

que se transporta paralelamente desde la posición P hasta la posición R
por 2 caminos diferentes: una vez pasando por Q y otra vez pasando por S.

Transporte P→Q:

Transporte paralelo significa derivada covariante nula en la dirección de desplazamiento $\vec{u}$.

$$U^\alpha \nabla_\alpha A^\lambda = U^\alpha \partial_\alpha A^\lambda + U^\alpha \Gamma^{\lambda}_{\alpha\mu} A^\mu = 0$$

$$U^\alpha \partial_\alpha A^\lambda = -U^\alpha \Gamma^{\lambda}_{\alpha\mu} A^\mu$$

Integramos a lo largo del recorrido entre P y Q; al tratarse de un trayecto pequeño tanto los símbolos de Christoffel como las componentes del vector A pueden sustituirse por su valor en el punto de origen P.

$$A^{\lambda}(Q) - A^{\lambda}(P) = -U^{\alpha}\Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\mu}(P)A^{\mu}(P)$$

$$A^{\lambda}(Q) = A^{\lambda}(P) - U^{\alpha}\Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\mu}(P)A^{\mu}(P)$$ →Truco δ Kronecker para sacar factor común

$$A^{\lambda}(Q) = \delta Kron^{\lambda}{}_{\mu}A^{\mu}(P) - U^{\alpha}\Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\mu}(P)A^{\mu}(P)$$

$$A^{\lambda}(Q) = [\delta^{\lambda}{}_{\mu} - U^{\alpha}\Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\mu}(P)]A^{\mu}(P)$$

Transporte Q→R:

Transporte paralelo significa derivada covariante nula en la dirección de desplazamiento $\vec{v}$.

$$V^{\beta}\nabla_{\beta}A^{\rho} = V^{\beta}\partial_{\beta}A^{\rho} + V^{\beta}\Gamma^{\rho}{}_{\beta\lambda}A^{\lambda} = 0$$

$$V^{\beta}\partial_{\beta}A^{\rho} = -V^{\beta}\Gamma^{\rho}{}_{\beta\lambda}A^{\lambda}$$

Integramos con el mismo criterio de aproximación para trayecto chico

$$A^{\rho}(R) - A^{\rho}(Q) = -V^{\beta}\Gamma^{\rho}{}_{\beta\lambda}(Q)A^{\lambda}(Q) = 0$$

$$A^{\rho}(R) = A^{\rho}(Q) - V^{\beta}\Gamma^{\rho}{}_{\beta\lambda}(Q)A^{\lambda}(Q)$$ →truco para factor común

$$A^{\rho}(R) = \delta^{\rho}{}_{\lambda}A^{\lambda}(Q) - V^{\beta}\Gamma^{\rho}{}_{\beta\lambda}(Q)A^{\lambda}(Q)$$

$$A^{\rho}(R) = [\delta^{\rho}{}_{\lambda} - V^{\beta}\Gamma^{\rho}{}_{\beta\lambda}(Q)]A^{\lambda}(Q)$$

→concatenamos los 2 trayectos

$$A^{\rho}(R) = [\delta^{\rho}{}_{\lambda} - V^{\beta}\Gamma^{\rho}{}_{\beta\lambda}(Q)].A^{\lambda}(Q)$$

$$A^{\rho}(R) = [\delta^{\rho}{}_{\lambda} - V^{\beta}\Gamma^{\rho}{}_{\beta\lambda}(Q)].[\delta^{\lambda}{}_{\mu} - U^{\alpha}\Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\mu}(P)]A^{\mu}(P)$$

$$A^{\rho}(R) = [\delta^{\rho}{}_{\lambda} - V^{\beta}\Gamma^{\rho}{}_{\beta\lambda}(Q)].[\delta^{\lambda}{}_{\mu} - U^{\alpha}\Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\mu}(P)]A^{\mu}(P)$$

Transporte P→S:

Desplazamiento $\vec{v}$.

Repetimos las cuentas con diferentes índices

$$A^{\lambda}(S) = [\delta^{\lambda}{}_{\mu} - V^{\beta}\Gamma^{\lambda}{}_{\beta\mu}(P)]A^{\mu}(P)$$

Transporte S→R:

Desplazamiento $\vec{v}$.

Repetimos las cuentas con diferentes índices

$$A^{\rho}(R) = [\delta^{\rho}{}_{\lambda} - U^{\alpha}\Gamma^{\rho}{}_{\alpha\lambda}(S)]A^{\lambda}(S)$$

→ concatenamos

$$A^{\rho}(R) = [\delta^{\rho}{}_{\lambda} - U^{\alpha}\Gamma^{\rho}{}_{\alpha\lambda}(S)].[\delta^{\lambda}{}_{\mu} - V^{\beta}\Gamma^{\lambda}{}_{\beta\mu}(P)]A^{\mu}(P)$$

Ordenamos el resultado de los 2 trayectos:

P→Q→R $A^{\rho}(R) = [\delta^{\rho}{}_{\lambda} - V^{\beta}\Gamma^{\rho}{}_{\beta\lambda}(Q)].[\delta^{\lambda}{}_{\mu} - U^{\alpha}\Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\mu}(P)]A^{\mu}(P)$

P→S→R $A^{\rho}(R) = [\delta^{\rho}{}_{\lambda} - U^{\alpha}\Gamma^{\rho}{}_{\alpha\lambda}(S)].[\delta^{\lambda}{}_{\mu} - V^{\beta}\Gamma^{\lambda}{}_{\beta\mu}(P)]A^{\mu}(P)$

Expandimos ambas expresiones, cuidando de "colapsar" los delta Kronecker.

P→Q→R:

$$A^{\rho}(R) = \{\ \delta^{\rho}{}_{\lambda}.[\delta^{\lambda}{}_{\mu} - U^{\alpha}\Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\mu}(P)] - V^{\beta}\Gamma^{\rho}{}_{\beta\lambda}(Q)].[\delta^{\lambda}{}_{\mu} - U^{\alpha}\Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\mu}(P)]\ \}A^{\mu}(P)$$

$$A^{\rho}(R) = \{\ \delta^{\rho}{}_{\mu} - U^{\alpha}\Gamma^{\rho}{}_{\alpha\mu}(P) - V^{\beta}\Gamma^{\rho}{}_{\beta\mu}(Q) + U^{\alpha}V^{\beta}\Gamma^{\rho}{}_{\beta\lambda}(Q)\Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\mu}(P)\ \}A^{\mu}(P)$$

P→S→R:

$$A^{\rho}(R) = [\ \delta^{\rho}{}_{\lambda}\ [\delta^{\lambda}{}_{\mu} - V^{\beta}\Gamma^{\lambda}{}_{\beta\mu}(P)]\ \ - U^{\alpha}\Gamma^{\rho}{}_{\alpha\lambda}(S)[\delta^{\lambda}{}_{\mu} + V^{\beta}\Gamma^{\lambda}{}_{\beta\mu}(P)]\ \}A^{\mu}(P)$$

$$A^{\rho}(R) = [\ \delta^{\rho}{}_{\mu} - V^{\beta}\Gamma^{\rho}{}_{\beta\mu}(P)\ \ - U^{\alpha}\Gamma^{\rho}{}_{\alpha\mu}(S) + V^{\beta}U^{\alpha}\Gamma^{\rho}{}_{\alpha\lambda}(S)\Gamma^{\lambda}{}_{\beta\mu}(P)\ \}A^{\mu}(P)$$

Calculamos la diferencia de transporte restando el celeste menos el verde:

$$\delta A^{\rho} =$$

$$\{\ \delta^{\rho}{}_{\mu} - U^{\alpha}\Gamma^{\rho}{}_{\alpha\mu}(P) - V^{\beta}\Gamma^{\rho}{}_{\beta\mu}(Q) + U^{\alpha}V^{\beta}\Gamma^{\rho}{}_{\beta\lambda}(Q)\Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\mu}(P) - \delta^{\rho}{}_{\mu} + V^{\beta}\Gamma^{\rho}{}_{\beta\mu}(P) + U^{\alpha}\Gamma^{\rho}{}_{\alpha\mu}(S) - V^{\beta}U^{\alpha}\Gamma^{\rho}{}_{\alpha\lambda}(S)\Gamma^{\lambda}{}_{\beta\mu}(P)\}A^{\mu}(P)$$

$$=\{\ \delta^{\rho}{}_{\mu} - \delta^{\rho}{}_{\mu} - U^{\alpha}\Gamma^{\rho}{}_{\alpha\mu}(P) + U^{\alpha}\Gamma^{\rho}{}_{\alpha\mu}(S) - V^{\beta}\Gamma^{\rho}{}_{\beta\mu}(Q) + V^{\beta}\Gamma^{\rho}{}_{\beta\mu}(P) + U^{\alpha}V^{\beta}\Gamma^{\rho}{}_{\beta\lambda}(Q)\Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\mu}(P) - V^{\beta}U^{\alpha}\Gamma^{\rho}{}_{\alpha\lambda}(S)\Gamma^{\lambda}{}_{\beta\mu}(P)\}A^{\mu}(P)$$

$$=\{ U^\alpha[-\Gamma^\rho{}_{\alpha\mu}(P)+\Gamma^\rho{}_{\alpha\mu}(S)] +V^\beta[-\Gamma^\rho{}_{\beta\mu}(Q)+\Gamma^\rho{}_{\beta\mu}(P)] +U^\alpha V^\beta[\Gamma^\rho{}_{\beta\lambda}(Q)\Gamma^\lambda{}_{\alpha\mu}(P)-\Gamma^\rho{}_{\alpha\lambda}(S)\Gamma^\lambda{}_{\beta\mu}(P)]\}A^\mu(P)$$

$$\delta A^\rho =\{ U^\alpha[-\Gamma^\rho{}_{\alpha\mu}(P) +\Gamma^\rho{}_{\alpha\mu}(S)] +V^\beta[-\Gamma^\rho{}_{\beta\mu}(Q)+\Gamma^\rho{}_{\beta\mu}(P)] +U^\alpha V^\beta[\Gamma^\rho{}_{\beta\lambda}(Q)\Gamma^\lambda{}_{\alpha\mu}(P)-\Gamma^\rho{}_{\alpha\lambda}(S)\Gamma^\lambda{}_{\beta\mu}(P)]\}A^\mu(P)$$

Para los términos de 2do orden en los desplazamientos no es relevante el punto P,Q,S donde se evalúan los Christoffel. Para los términos de primer orden en los desplazamientos sí es importante.

Utilizamos entonces las derivadas direccionales $\vec{u}\cdot\nabla$, $\vec{v}\cdot\nabla$

$$\Gamma^\rho{}_{\beta\mu}(Q)-\Gamma^\rho{}_{\beta\mu}(P) = U^\alpha\partial_\alpha\Gamma^\rho{}_{\beta\mu}$$

$$\Gamma^\rho{}_{\alpha\mu}(S)-\Gamma^\rho{}_{\alpha\mu}(P) = V^\beta\partial_\beta\Gamma^\rho{}_{\alpha\mu}$$

$$\delta A^\rho =\{ U^\alpha[-\Gamma^\rho{}_{\alpha\mu}(P)+\Gamma^\rho{}_{\alpha\mu}(S)] +V^\beta[-\Gamma^\rho{}_{\beta\mu}(Q)+\Gamma^\rho{}_{\beta\mu}(P)] +U^\alpha V^\beta[\Gamma^\rho{}_{\beta\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\alpha\mu}-\Gamma^\rho{}_{\alpha\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\beta\mu}]\}A^\mu$$

$$\delta A^\rho =\{ U^\alpha V^\beta\partial_\beta\Gamma^\rho{}_{\alpha\mu} +V^\beta[-U^\alpha\partial_\alpha\Gamma^\rho{}_{\beta\mu}] +U^\alpha V^\beta[\Gamma^\rho{}_{\beta\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\alpha\mu}-\Gamma^\rho{}_{\alpha\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\beta\mu}]\} A^\mu$$

$$\delta A^\rho =\{ \partial_\beta\Gamma^\rho{}_{\alpha\mu} -\partial_\alpha\Gamma^\rho{}_{\beta\mu}] + \Gamma^\rho{}_{\beta\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\alpha\mu}- \Gamma^\rho{}_{\alpha\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\beta\mu} \} U^\alpha V^\beta A^\mu$$

$$\delta A^\rho = -R^\rho{}_{\mu\alpha\beta}\, U^\alpha V^\beta A^\mu$$

Reconocemos exactamente (salvo un signo) al tensor de Riemann definido en 9.1

9.3: Subir/bajar índices con Minkowski:

En el régimen de campos débiles, $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$, con $h_{\alpha\beta}$ chico, $|h_{\alpha\beta}|\ll 1$.

Proponemos como candidato a tensor inverso $G^{\lambda\alpha} = \eta^{\lambda\alpha} - h^{\lambda\alpha}$

, siendo $h^{\lambda\alpha}$ = el resultado de subir índices a $h_{\lambda\alpha}$ con la métrica de Minkowski.

Calculamos:

$$G^{\lambda\alpha}.g_{\alpha\beta} = [\eta^{\lambda\alpha} - h^{\lambda\alpha}].[\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}]$$
$$= \eta^{\lambda\alpha}.\eta_{\alpha\beta} - h^{\lambda\alpha}.\eta_{\alpha\beta} + \eta^{\lambda\alpha}.h_{\alpha\beta} - h^{\lambda\alpha}.h_{\alpha\beta}$$
$$= \eta^\lambda{}_\beta - h^\lambda{}_\beta + h^\lambda{}_\beta - h^{\lambda\alpha}.h_{\alpha\beta}$$
$$= \eta^\lambda{}_\beta - h^{\lambda\alpha}.h_{\alpha\beta}$$
$$= \delta^\lambda{}_\beta - h^{\lambda\alpha}.h_{\alpha\beta}$$

El producto da la matriz identidad + un residuo de orden h^2.

Bajo la hipótesis de que $|h|\ll 1$, se cumple $|h^2|\ll|h|$, se acostumbra descartar este residuo por considerarse un infinitésimo de mayor orden.

9.4: Ecuaciones de Maxwell covariantes:

La divergencia covariante del tensor $F^{\alpha\beta}$ debe calcularse según las fórmulas 8.4.6

$$\nabla_\sigma F^{\alpha\beta} = \partial_\sigma F^{\alpha\beta} + \Gamma^\alpha{}_{\sigma\lambda} F^{\lambda\beta} + \Gamma^\beta{}_{\sigma\lambda} F^{\alpha\lambda} \quad \rightarrow \text{contraemos } \sigma=\alpha$$

$$\nabla_\alpha F^{\alpha\beta} = \partial_\alpha F^{\alpha\beta} + \Gamma^\alpha{}_{\alpha\lambda} F^{\lambda\beta} + \Gamma^\beta{}_{\alpha\lambda} F^{\alpha\lambda} \quad \rightarrow \text{fórmula 9.2.1}$$

$$\nabla_\alpha F^{\alpha\beta} = \partial_\alpha F^{\alpha\beta} + (1/\sqrt{}).\partial_\lambda\sqrt{}\ F^{\lambda\beta} + \Gamma^\beta{}_{\alpha\lambda} F^{\alpha\lambda}$$

$$\nabla_\alpha F^{\alpha\beta} = \partial_\alpha F^{\alpha\beta} + (1/\sqrt{}).\partial_\lambda\sqrt{}\ F^{\lambda\beta} + \Gamma^\beta{}_{\alpha\lambda} F^{\alpha\lambda} \quad \rightarrow \text{renombramos índice } \textit{dummy}$$

$$\nabla_\alpha F^{\alpha\beta} = \partial_\alpha F^{\alpha\beta} + (1/\sqrt{}).\partial_\alpha\sqrt{}\ F^{\alpha\beta} + \Gamma^\beta{}_{\alpha\lambda} F^{\alpha\lambda} \quad \rightarrow \text{derivada de producto}$$

$$\nabla_\alpha F^{\alpha\beta} = (1/\sqrt{})\partial_\alpha(\sqrt{}.F^{\alpha\beta}) + \Gamma^\beta{}_{\alpha\lambda} F^{\alpha\lambda}$$

La parte resaltada en amarillo es la que usamos en varios pasajes de este trabajo, tratando como vectores a las columnas del tensor de campo electromagnético a los efectos de tomar la divergencia.

En este ejercicio debemos justificar que hicimos bien en ignorar la parte violeta.

Se trata de una doble contracción de un tensor simétrico de Christoffel con un tensor antisimétrico.

Para cada pareja $\alpha\lambda$ existe la pareja $\lambda\alpha$, $\Gamma^\beta{}_{\lambda\alpha}$ repite valor pero $F^{\lambda\alpha}$ aporta un signo negativo y cancela.

La doble suma en α,λ es nula. $\rightarrow$ $\Gamma^\beta{}_{\alpha\lambda} F^{\alpha\lambda}=0\,\forall\beta$

9.4.3: Segunda Identidad de Bianchi:

Presentamos la demostración de: $\nabla_\sigma R^\lambda{}_{\mu\alpha\beta} + \nabla_\beta R^\lambda{}_{\mu\sigma\alpha} + \nabla_\alpha R^\lambda{}_{\mu\beta\sigma} = 0$

Debido a la complejidad de los cálculos es conveniente restringirnos a un sistema de coordenadas inerciales, válido en un pequeño entorno de aproximación en el cual la métrica es cuasi-Minkowski y la derivada covariante se aproxima por derivada coordenada.

$$R^\lambda{}_{\mu\alpha\beta} \approx \partial_\alpha \Gamma^\lambda{}_{\mu\beta} - \partial_\beta \Gamma^\lambda{}_{\mu\alpha} \qquad \rightarrow \text{derivada } \partial/\partial\sigma$$
$$\partial_\sigma R^\lambda{}_{\mu\alpha\beta} \approx \partial_\sigma \partial_\alpha \Gamma^\lambda{}_{\mu\beta} - \partial_\sigma \partial_\beta \Gamma^\lambda{}_{\mu\alpha}$$

Permutamos en forma cíclica los índices que no son λ ni μ:

$$\partial_\sigma R^\lambda{}_{\mu\alpha\beta} \approx \partial_\sigma \partial_\alpha \Gamma^\lambda{}_{\mu\beta} - \partial_\sigma \partial_\beta \Gamma^\lambda{}_{\mu\alpha}$$
$$\partial_\beta R^\lambda{}_{\mu\sigma\alpha} \approx \partial_\beta \partial_\sigma \Gamma^\lambda{}_{\mu\alpha} - \partial_\beta \partial_\alpha \Gamma^\lambda{}_{\mu\sigma}$$
$$\partial_\alpha R^\lambda{}_{\mu\beta\sigma} \approx \partial_\alpha \partial_\beta \Gamma^\lambda{}_{\mu\sigma} - \partial_\alpha \partial_\sigma \Gamma^\lambda{}_{\mu\beta}$$

$$\text{suma} = \partial_\sigma \partial_\alpha \Gamma^\lambda{}_{\mu\beta} - \partial_\sigma \partial_\beta \Gamma^\lambda{}_{\mu\alpha} + \partial_\beta \partial_\sigma \Gamma^\lambda{}_{\mu\alpha} - \partial_\beta \partial_\alpha \Gamma^\lambda{}_{\mu\sigma} + \partial_\alpha \partial_\beta \Gamma^\lambda{}_{\mu\sigma} - \partial_\alpha \partial_\sigma \Gamma^\lambda{}_{\mu\beta}$$
$$\text{suma} = \partial_\sigma \partial_\alpha \Gamma^\lambda{}_{\mu\beta} - \partial_\sigma \partial_\beta \Gamma^\lambda{}_{\mu\alpha} + \partial_\beta \partial_\sigma \Gamma^\lambda{}_{\mu\alpha} - \partial_\beta \partial_\alpha \Gamma^\lambda{}_{\mu\sigma} + \partial_\alpha \partial_\beta \Gamma^\lambda{}_{\mu\sigma} - \partial_\alpha \partial_\sigma \Gamma^\lambda{}_{\mu\beta}$$
$$\text{suma} = 0 + 0 + 0 = 0$$

Se explota la propiedad de que las derivadas segundas son conmutativas porque en el referencial inercial ∇_α se aproxima por ∂_α.

9.4.4: Simetrías del tensor de Riemann:

$$R_{\sigma\mu\alpha\beta} \approx \partial_\alpha(\Gamma_{\sigma,\mu\beta}) - \partial_\beta(\Gamma_{\sigma,\mu\alpha})$$

Expandimos explícitamente los símbolos de Christoffel de 1ra especie:

$$R_{\sigma\mu\alpha\beta} \approx \partial_\alpha(\Gamma_{\sigma,\mu\beta}) - \partial_\beta(\Gamma_{\sigma,\mu\alpha})$$
$$2.R_{\sigma\mu\alpha\beta} \approx \partial_\alpha(\partial_\mu g_{\sigma\beta} + \partial_\beta g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\beta}) - \partial_\beta(\partial_\mu g_{\sigma\alpha} + \partial_\alpha g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\alpha})$$
$$2.R_{\sigma\mu\alpha\beta} \approx \partial^2{}_{\alpha\mu} g_{\sigma\beta} + \partial^2{}_{\alpha\beta} g_{\sigma\mu} - \partial^2{}_{\alpha\sigma} g_{\mu\beta} - \partial^2{}_{\beta\mu} g_{\sigma\alpha} + \partial^2{}_{\beta\alpha} g_{\sigma\mu} - \partial^2{}_{\beta\sigma} g_{\mu\alpha}$$
$$2.R_{\sigma\mu\alpha\beta} \approx \partial^2{}_{\alpha\mu} g_{\sigma\beta} + \partial^2{}_{\alpha\beta} g_{\sigma\mu} - \partial^2{}_{\alpha\sigma} g_{\mu\beta} - \partial^2{}_{\beta\mu} g_{\sigma\alpha} - \partial^2{}_{\beta\alpha} g_{\sigma\mu} + \partial^2{}_{\beta\sigma} g_{\mu\alpha}$$
$$2.R_{\sigma\mu\alpha\beta} \approx \partial^2{}_{\alpha\mu} g_{\sigma\beta} - \partial^2{}_{\alpha\sigma} g_{\mu\beta} - \partial^2{}_{\beta\mu} g_{\sigma\alpha} + \partial^2{}_{\beta\sigma} g_{\mu\alpha}$$

Gracias al uso de las coordenadas inerciales, podemos reducir la expresión porque las derivadas segundas conmutan sin importar el orden en que se deriva. Si utilizáramos coordenadas genéricas nos meteríamos en grandes complicaciones de cálculo porque las derivadas segundas covariantes no conmutan.

Intercambio de parejas de índices:

Reordenamos y reagrupamos

$$2.R_{\sigma\mu\alpha\beta} \approx \partial^2{}_{\alpha\mu} g_{\sigma\beta} - \partial^2{}_{\alpha\sigma} g_{\mu\beta} - \partial^2{}_{\beta\mu} g_{\sigma\alpha} + \partial^2{}_{\beta\sigma} g_{\mu\alpha}$$
$$2.R_{\sigma\mu\alpha\beta} \approx \partial^2{}_{\alpha\mu} g_{\sigma\beta} + \partial^2{}_{\beta\sigma} g_{\mu\alpha} - \partial^2{}_{\alpha\sigma} g_{\mu\beta} - \partial^2{}_{\beta\mu} g_{\sigma\alpha}$$
$$2.R_{\sigma\mu\alpha\beta} \approx [\partial^2{}_{\alpha\mu} g_{\sigma\beta} + \partial^2{}_{\beta\sigma} g_{\mu\alpha}] - \partial^2{}_{\alpha\sigma} g_{\mu\beta} - \partial^2{}_{\beta\mu} g_{\sigma\alpha}$$

Si cambiamos $\alpha \leftrightarrow \sigma$, $\beta \leftrightarrow \mu$

los 2 primeros términos (+) repiten su valor y los 2 últimos términos (-) también.

$$R_{\sigma\mu\alpha\beta} = R_{\alpha\beta\sigma\mu}$$

Intercambio de los últimos índices α β:

Agrupamos:

$$2.R_{\sigma\mu\alpha\beta} \approx \partial^2{}_{\alpha\mu} g_{\sigma\beta} - \partial^2{}_{\alpha\sigma} g_{\mu\beta} - \partial^2{}_{\beta\mu} g_{\sigma\alpha} + \partial^2{}_{\beta\sigma} g_{\mu\alpha}$$
$$2.R_{\sigma\mu\alpha\beta} \approx [\partial^2{}_{\alpha\mu} g_{\sigma\beta} - \partial^2{}_{\beta\mu} g_{\sigma\alpha}] - \partial^2{}_{\alpha\sigma} g_{\mu\beta} + \partial^2{}_{\beta\sigma} g_{\mu\alpha}$$

Si α y β intercambian roles, los términos verdes adquieren un valor opuesto. Los celestes también.

$$R_{\sigma\mu\alpha\beta} = -R_{\sigma\mu\beta\alpha}$$

Intercambio de los primeros índices σ μ:

Se repiten las ideas ya vistas, el resultado es un cambio de signo.

$$R_{\sigma\mu\alpha\beta} = -R_{\mu\sigma\alpha\beta}$$

10.2: Divergencia del tensor de energía-impulso para polvo:

La expresión del tensor para polvo cósmico es:

$$T^{\alpha\beta} = \rho_o.U^\alpha U^\beta$$

Su divergencia covariante es:

$$\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = \nabla_\alpha(\rho_o.U^\alpha)U^\beta + \rho_o.U^\alpha\nabla_\alpha U^\beta$$

El segundo sumando coloreado en verde se anula debido a que las masas que forman el polvo se mueven siguiendo las trayectorias geodésicas.

$U^\alpha\nabla_\alpha U^\beta = U^\alpha(\partial_\alpha U^\beta + \Gamma^\beta_{\alpha\rho}U^\rho)$ →fórmula 8.2.5

$U^\alpha\nabla_\alpha U^\beta = U^\alpha(\partial_\alpha U^\beta + \Gamma^\beta_{\alpha\rho}U^\rho)$

$U^\alpha\nabla_\alpha U^\beta = U^\alpha\partial_\alpha U^\beta + U^\alpha\Gamma^\beta_{\alpha\rho}U^\rho$

$U^\alpha\nabla_\alpha U^\beta = dU^\beta/d\tau + \Gamma^\beta_{\alpha\rho}U^\rho U^\alpha$

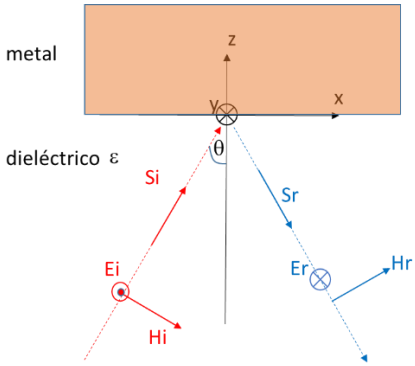
$U^\alpha\nabla_\alpha U^\beta = dU^\beta/d\tau + \Gamma^\beta_{\alpha\rho}U^\rho U^\alpha = 0$

←Esto es nulo por la ecuación geodésica 8.4

No es tan inmediato ver que también se anula el primer sumando gris $\nabla_\alpha(\rho_o.U^\alpha)$.
Convendría razonarlo en un ambiente de muy baja gravedad, ya sea alejándonos lo suficiente de las fuentes gravitatorias o dejándonos caer en caída libre para acceder a un referencial inercial.
En estas condiciones idealizadas $\nabla_\alpha \approx \partial_\alpha$. $U^\alpha = \dot{t}.(c, \vec{u})$ con $\dot{t}\approx 1$
Entonces $\nabla_\alpha(\rho_o.U^\alpha) \approx \nabla\cdot(\rho_o.\vec{u}) + \partial(\rho_o)/\partial t$.
Es la típica ley clásica de conservación de una densidad y un flujo.
→Luego de hecho este razonamiento, el Principio de Mínimo Acople de 9.4 nos permitiría extender este resultado a escenarios generales.

10.3: Momento electromagnético, reflexión con incidencia oblicua:

→Polarización $E_\perp$: $\vec{E}$ perpendicular al plano de incidencia:



Condiciones de borde en la frontera z=0:

Campo eléctrico tangencial Ex: $E_i = E_r$

Campo eléctrico normal Dz: $\sigma_s = 0$

Campo magnético tangencial Hy: $j_S = 2.H_i.\cos(\theta)$

Campo magnético normal: $H_i.\sen(\theta_i) = H_r.\sen(\theta_r)$; $H_i=H_r$; $\theta_i=\theta_r=\theta$

Fuerza eléctrica sobre un elemento de área dx.dy:

$dF_z = dQ.\langle E_z\rangle$ $\sigma_s = 0$

→$dF_z = 0$ porque no se induce carga superficial para esta polarización

Fuerza magnética sobre un elemento de área dx.dy:

$dF_z = I_x.dx.\langle B_y\rangle$ $I_x = j_s.dy$

$dF_z = j_s.dy.dx.\langle B_y\rangle$

dFz = j_S.dy.dx.<By> $j_S = 2.Hi.\cos(\theta)$

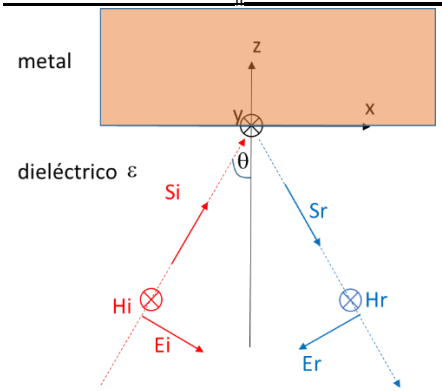
dFz = 2.Hi.cos(θ).dy.dx.<By>

dFz = 2.Hi.cos(θ).dy.dx.<By> <By> = $\mu_o/2[Hy(z<0)+Hy(z>0)]=\mu_o.½.[2.Hi.\cos(\theta)+0]$

dFz = 2.Hi.cos(θ).dy.dx.<μ_oHi.cosθ>

$dFz = 2.Hi^2.\cos^2(\theta).dy.dx$

→Polarización $E_{\parallel}$: $\vec{E}$ contenido en el plano de incidencia.



Condiciones de borde en la frontera z=0:

Campo eléctrico tangencial Ex: Ei.cos(θi)=Er.cos(θr); Ei=Er; θi=θr=θ

Campo eléctrico normal Dz: $\sigma s = 2.\epsilon.Ei.\sen(\theta)$

Campo magnético tangencial Hy: $j_S = 2.Hi$

Campo eléctrico normal Bz: Bz=0

Fuerza eléctrica sobre un elemento de área dx.dy:

Fuerza dFz = dQ.<Ez>

carga dQ= σs.dx.dy

valor medio <Ez> = ½.[Ez(z<0) + Ez(z>0)] = ½.[–2.Ei.sen(θ) + 0] = –Ei.sen(θ)

→dF = σs.dx.dy. [–Ei.sen(θ)]

dF = –2.ϵ.Ei.sen(θ).dx.dy. Ei.sen(θ)

$dF = –2.\epsilon.Ei^2.\sen^2(\theta).dx.dy$

Fuerza magnética sobre un elemento de área dx.dy:

Fuerza dF = I.dx.<By> = I.dx.μ_o.<Hy>

corriente Ix = j_S.dy

valor medio <Hy> = ½.[Hy(z<0)+Hy(z>0)] = ½. 2.Hi = Hi

dF = I.dx.μ_o.<Hy> = j_S.dy.dx.μ_o. Hi

dF = j_S.dy.dx.μ_o. Hi = 2Hi.dy.dx.μ_o. Hi

$dF = \mu_o.2Hi^2.dy.dx$

Fuerza electromagnética:

$dF = 2.dx.dy.[–\epsilon.Ei^2.\sen^2(\theta) + \mu_o.Hi^2]$

Si introducimos la relación de impedancia de propagación $Ei/Hi=\sqrt{\mu_o/\epsilon}$ queda: $\epsilon.Ei^2=\mu_o.Hi^2$

$dF = 2.dx.dy.\mu_o.Hi^2.[–\sen^2(\theta) + 1]$

$dF = 2.dx.dy.\mu_o.Hi^2.\cos^2(\theta)$

La fuerza es la misma para ambas polarizaciones $E_{\perp}$ y $E_{\parallel}$.

10.3.1: Tensor de tensiones clásico:

La fuerza de Lorentz volumétrica es $\vec{f} = \rho.\vec{E} + \vec{J} \wedge \vec{B}$.

Recurrimos a las ecuaciones de Maxwel para eliminar las fuentes

$\rho=\epsilon_o.\nabla\cdot\vec{E}$

$\vec{J} = (\nabla\wedge \vec{B})/\mu_o - \epsilon_o\, \partial_t\vec{E}$

$\vec{f} = \rho.\vec{E}+\vec{J}\wedge\vec{B}$

$\vec{f} = \epsilon_o.\nabla\cdot\vec{E}.\vec{E}+[(\nabla\wedge \vec{B})/\mu_o - \epsilon_o\, \partial_t\vec{E}]\wedge\vec{B}$

$\vec{f} = \epsilon_o.\nabla\cdot\vec{E}.\vec{E}+1/\mu_o(\nabla\wedge \vec{B})\wedge\vec{B}-\epsilon_o\partial_t\vec{E}\wedge\vec{B}$ →derivada de producto

$\vec{f} = \epsilon_o.\nabla\cdot\vec{E}.\vec{E}+1/\mu_o(\nabla\wedge \vec{B})\wedge\vec{B}-\epsilon_o\partial_t(\vec{E}\wedge\vec{B})+\epsilon_o\vec{E}\wedge\partial_t\vec{B}$

$\vec{f} = \epsilon_o.\nabla\cdot\vec{E}.\vec{E}+1/\mu_o(\nabla\wedge \vec{B})\wedge\vec{B}-\epsilon_o\partial_t(\vec{E}\wedge\vec{B})+\epsilon_o\vec{E}\wedge\partial_t\vec{B}$ →Poynting

$\vec{f} = \epsilon_o.\nabla\cdot\vec{E}.\vec{E}+1/\mu_o(\nabla\wedge \vec{B})\wedge\vec{B}- \epsilon_o\partial_t(\mu_o\vec{S})+\epsilon_o\vec{E}\wedge\partial_t\vec{B}$

$\vec{f} = \epsilon_o.\nabla\cdot\vec{E}.\vec{E}+1/\mu_o(\nabla\wedge \vec{B})\wedge\vec{B}- 1/c^2.\partial_t\vec{S}+\epsilon_o\vec{E}\wedge\partial_t\vec{B}$ →Faraday

$\vec{f} = \epsilon_o.\nabla\cdot\vec{E}.\vec{E}+1/\mu_o(\nabla\wedge \vec{B})\wedge\vec{B}- 1/c^2.\partial_t\vec{S}+\epsilon_o\vec{E}\wedge(-\nabla\wedge\vec{E})$

$\vec{f} = \epsilon_o.\nabla\cdot\vec{E}.\vec{E}+1/\mu_o(\nabla\wedge \vec{B})\wedge\vec{B}- 1/c^2.\partial_t\vec{S}+\epsilon_o\,(\nabla\wedge\vec{E})\wedge\vec{E}$

Hay cierta simetría en los términos eléctricos y magnéticos, que se puede acentuar agregando el término nulo $(\nabla\cdot\vec{B}).\vec{B}/\mu_o$

$\vec{f} = \epsilon_o.\nabla\cdot\vec{E}.\vec{E}+\epsilon_o\,(\nabla\wedge\vec{E})\wedge\vec{E} + (\nabla\cdot\vec{B}).\vec{B}/\mu_o +1/\mu_o(\nabla\wedge \vec{B})\wedge\vec{B} - 1/c^2.\partial_t\vec{S}$

Aplicamos una identidad del Cálculo Vectorial para el gradiente de un producto escalar

$\nabla\,(\vec{U}\cdot\vec{V}) =\vec{U}\cdot\nabla\,\vec{V} + \vec{V}\cdot\nabla\vec{U} + \vec{U}\wedge(\nabla\wedge\vec{V}) + \vec{V}\wedge(\nabla\wedge\vec{U})$ →caso $\vec{U}=\vec{V}$

$\nabla\,(U^2) =2\vec{U}\cdot\nabla\vec{U} + 2\vec{U}\wedge(\nabla\wedge\vec{U})$

$\nabla\,(U^2/2) =\vec{U}\cdot\nabla\vec{U} + \vec{U}\wedge(\nabla\wedge\vec{U})$ →antisimetría de $\wedge$

$\nabla\,(U^2/2) =\vec{U}\cdot\nabla\vec{U} - (\nabla\wedge\vec{U})\wedge\vec{U}$

$(\nabla\wedge\vec{U})\wedge\vec{U} = \vec{U}\cdot\nabla\vec{U} -\nabla\,(U^2/2)$

Esta relación la utilizamos para ambos campos: eléctrico y magnético.

Al sumar las partes eléctricas, nos queda $\nabla\cdot(E\otimes E)$

f f f

10.3.3: Tensor de energía-impulso electromagnético:

Tomamos como punto de partida la fuerza de Lorentz por unidad de volumen, en versión covariante (la parte clásica es $\rho.\vec{E} + \vec{J}\wedge\vec{B}$).

En notación tensorial:

$f_\alpha = F_{\alpha\beta}\, J^\beta$

Relacionamos las fuentes carga-corriente a través de las ecuaciones de Maxwell $\nabla_\sigma F^{\sigma\beta} = -\mu_o.J^\beta$

$f_\alpha = F_{\alpha\beta}\, J^\beta$

$f_\alpha = -1/\mu_o.\,(\nabla_\sigma F^{\sigma\beta})F_{\alpha\beta}$

Hacemos aparecer la derivada del producto, como si integráramos por partes.

$f_\alpha = -1/\mu_o.\,[\nabla_\sigma(F^{\sigma\beta}.F_{\alpha\beta}) -F^{\sigma\beta}.\nabla_\sigma(F_{\alpha\beta})]$

$f_\alpha = 1/\mu_o.\,[-\nabla_\sigma(F^{\sigma\beta}.F_{\alpha\beta}) +F^{\sigma\beta}.\nabla_\sigma(F_{\alpha\beta})]$ →antisimetría

$f_\alpha = 1/\mu_o.\,[\nabla_\sigma(F^{\sigma\beta}.F_{\beta\alpha}) +F^{\sigma\beta}.\nabla_\sigma(F_{\alpha\beta})]$

Reconocemos el tensor definido en 5.6.5 $Y^\sigma{}_\alpha=F^{\sigma\beta}.F_{\beta\alpha}$

$f_\alpha = 1/\mu_o.\,[\nabla_\sigma(F^{\sigma\beta}.F_{\beta\alpha}) +F^{\sigma\beta}.\nabla_\sigma(F_{\alpha\beta})]$

$f_\alpha = 1/\mu_o.\,[\nabla_\sigma(Y^\sigma{}_\alpha) +F^{\sigma\beta}.\nabla_\sigma(F_{\alpha\beta})]$

El resultado al que queremos llegar es que la fuerza en versión contravariante sea la divergencia de un tensor: $f^\mu = \nabla_\sigma T^{\sigma\mu}$

La parte "verde" ya se acerca a la forma que estamos buscando, no la tocamos más.

Observamos en la parte "gris" que hay una doble contracción en los índices σ,β, lo que se presta para alguna maniobra matemática.

(f1) $F^{\sigma\beta}.\nabla_\sigma(F_{\alpha\beta}) =$ $\rightarrow$antisimetría $F_{\alpha\beta} = -F_{\beta\alpha}$

$-F^{\sigma\beta}.\nabla_\sigma(F_{\beta\alpha}) =$

$-F^{\sigma\beta}.\nabla_\sigma(F_{\beta\alpha}) =$ $\rightarrow$antisimetría $F^{\sigma\beta} = -F^{\beta\sigma}$

$F^{\beta\sigma}.\nabla_\sigma(F_{\beta\alpha}) =$

(f2) $F^{\sigma\beta}.\nabla_\beta(F_{\sigma\alpha}) =$ $\rightarrow$ intercambiamos roles β, σ que son índices dummy

Al ser (f1)=(f2), podemos sustituir la forma (f1) por el promedio (f1+f2)/2

$F^{\sigma\beta}.\nabla_\sigma(F_{\alpha\beta}) = [F^{\sigma\beta}.\nabla_\sigma(F_{\alpha\beta}) + F^{\sigma\beta}.\nabla_\beta(F_{\sigma\alpha})]/2$

$F^{\sigma\beta}.\nabla_\sigma(F_{\alpha\beta}) = \frac{1}{2}.\ F^{\sigma\beta}.\ [\nabla_\sigma(F_{\alpha\beta}) + \nabla_\beta(F_{\sigma\alpha})]$

Aplicamos la Primera Identidad de Bianchi

$F^{\sigma\beta}.\nabla_\sigma(F_{\alpha\beta}) = \frac{1}{2}.\ F^{\sigma\beta}.\ [\nabla_\sigma(F_{\alpha\beta}) + \nabla_\beta(F_{\sigma\alpha})]$

$F^{\sigma\beta}.\nabla_\sigma(F_{\alpha\beta}) = \frac{1}{2}.\ F^{\sigma\beta}.\ [-\nabla_\alpha(F_{\beta\sigma})]$

Volvemos a la ecuación de la fuerza de Lorentz para hacer la sustitución necesaria de lo que acabamos de operar.

$f_\alpha = 1/\mu_o.\ [\nabla_\sigma(Y^\sigma{}_\alpha) + F^{\sigma\beta}.\nabla_\sigma(F_{\alpha\beta})]$

$f_\alpha = 1/\mu_o.\ [\ \nabla_\sigma(Y^\sigma{}_\alpha) - \frac{1}{2}.\ F^{\sigma\beta}.\nabla_\alpha(F_{\beta\sigma})\ ]$

$f_\alpha = 1/\mu_o.\ [\ \nabla_\sigma(Y^\sigma{}_\alpha) - \frac{1}{2}.\ F^{\sigma\beta}.\nabla_\alpha(F_{\beta\sigma})\ ]$

Reconocemos la derivada de un producto

$\nabla_\alpha(Y) = \nabla_\alpha(F^{\sigma\beta}.F_{\beta\sigma})$

$\nabla_\alpha(Y) = \nabla_\alpha(F^{\sigma\beta}).F_{\beta\sigma} + F^{\sigma\beta}.\nabla_\alpha(F_{\beta\sigma})$ Es suma de 2 términos iguales, veremos en seguida

$\nabla_\alpha(Y) = \nabla_\alpha(F^{\sigma\beta}).g_{\beta\lambda}.F^{\lambda\mu}.g_{\mu\sigma} + F^{\sigma\beta}.\nabla_\alpha(F_{\beta\sigma})$

$\nabla_\alpha(Y) = \nabla_\alpha(g_{\mu\sigma}.F^{\sigma\beta}.g_{\beta\lambda}).F^{\lambda\mu}. + F^{\sigma\beta}.\nabla_\alpha(F_{\beta\sigma})$

$\nabla_\alpha(Y) = \nabla_\alpha(F_{\mu\lambda}).F^{\lambda\mu}. + F^{\sigma\beta}.\nabla_\alpha(F_{\beta\sigma})$ $\rightarrow$índices dummy, se pueden renombrar

$\nabla_\alpha(Y) = \nabla_\alpha(F_{\beta\sigma}).F^{\sigma\beta}. + F^{\sigma\beta}.\nabla_\alpha(F_{\beta\sigma})$

$\nabla_\alpha(Y) = 2.\nabla_\alpha(F_{\beta\sigma}).F^{\sigma\beta}$

$\nabla_\alpha(F_{\beta\sigma}).F^{\sigma\beta} = \nabla_\alpha(Y/2)$

Volvemos a la fuerza de Lorentz

$f_\alpha = 1/\mu_o.\ [\ \nabla_\sigma(Y^\sigma{}_\alpha) - \frac{1}{2}.\ F^{\sigma\beta}.\nabla_\alpha(F_{\beta\sigma})\ ]$

$f_\alpha = 1/\mu_o.\ [\ \nabla_\sigma(Y^\sigma{}_\alpha) - \frac{1}{2}.\ \nabla_\alpha(Y/2)\ ]$

$f_\alpha = 1/\mu_o.\ [\ \nabla_\sigma(Y^\sigma{}_\alpha) - \nabla_\alpha(Y/4)\ ]$

Multiplicamos ahora por el tensor métrico dual para llevar a forma contravariante.

$f_\alpha.g^{\alpha\rho} = g^{\alpha\rho}/\mu_o.\ [\ \nabla_\sigma(Y^\sigma{}_\alpha) - \nabla_\alpha(Y/4)\ ]$

$f^\rho = 1/\mu_o.\ [\ \nabla_\sigma(Y^{\sigma\rho}) - \nabla_\alpha(Y/4.g^{\alpha\rho})\ ]$

Finalmente observamos que α y σ son índices dummy, se pueden renombrar.
Y nos queda la fuerza contravariante como divergencia de un tensor:

$f^\rho = 1/\mu_o.\ [\ \nabla_\sigma(Y^{\sigma\rho}) - \nabla_\alpha(Y/4.g^{\alpha\rho})\ ]$

$f^\rho = 1/\mu_o.\ [\ \nabla_\sigma(Y^{\sigma\rho}) - \nabla_\sigma(Y/4.g^{\sigma\rho})\ ]$

$f^\rho = 1/\mu_o.\nabla_\sigma[\ Y^{\sigma\rho} - Y/4.g^{\sigma\rho}\ ]$

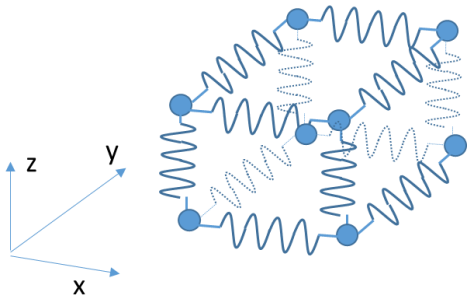
$f^\rho = -\nabla_\sigma[\ T^{\sigma\rho}]$ siendo $-T^{\sigma\rho} = Y^{\sigma\rho} - Y/4.g^{\sigma\rho}$

(Revisar el signo, puede haber alguna imperfección)

10.4.2: Gravedad generada por presión:

Al momento de tratar el capítulo 10, todavía no están desarrolladas las ecuaciones de campo de la gravitación en la forma presentada por Einstein.

Se intenta visualizar a través de imágenes aproximadas cómo es posible que la presión (ubicada en la diagonal espacial del tensor $T_{\alpha\beta}$) también sea una fuente de potencial gravitatorio (ubicado en la casilla temporal de la métrica g_{00}).
Suponemos un material sólido con una estructura interna modelada en forma similar a como hicimos en el capítulo 7.4: centros de masa m_o unidos por resortes de largo l_o y constante elástica k_o.
El sólido lo declaramos a efectos prácticos como incompresible, pero con eso queremos indicar que tiene la mínima compresibilidad posible compatible con la causalidad. Es decir, sus perturbaciones se propagan a la velocidad de la luz de acuerdo con la fórmula 7.4.3 $m_o.c^2 = k_o.l_o^2$.



En una cierta dirección, por ejemplo 'z', la relación entre fuerza y deformación es:
$f_z = k_o.\Delta z$
El área sobre la que actúa es l_o^2, lo que representa una presión de $p=f_z/l_o^2$.
Por lo tanto

$\Delta z = f_z/k_o$
$\Delta z = p.l_o^2/k_o$
$\Delta z/l_o = p.l_o/k_o$

La densidad efectiva, teniendo en cuenta la compresión, es:

ρ = masa/volumen	
$\rho = m_o/[(l_o-\Delta x).(l_o-\Delta y).(l_o-\Delta z)]$	por isotropía $\Delta x=\Delta y=\Delta z$
$\rho = m_o/(l_o-\Delta z)^3$	
$\rho = m_o/l_o^3(1-\Delta z/l_o)^3$	para apartamientos chicos $\Delta z \ll l_o$
$\rho \approx m_o/l_o^3.(1+3.\Delta z/l_o)$	sustituimos el mínimo Δz posible
$\rho \approx m_o/l_o^3.(1+3.p.l_o/k_o)$	
$\rho \approx m_o/l_o^3 + 3.m_o.p/(k_o.l_o^2)$	sustituimos ecuación 7.4.3 $m_o.c^2 = k_o.l_o^2$
$\rho \approx m_o/l_o^3 + 3.p/c^2$	

$\rho \approx \rho_o + 3.p/c^2$

- $\rho_o=m_o/l_o^3$ vendría a ser la densidad de masa en reposo asociada a la cantidad de materia. Desde el punto de vista clásico esta es la única fuente de potencial gravitatorio.
- $3p/c^2$ es el incremento relativista

.

11.7.4: Variación del tensor de Riemann:

Al estudiar la variación de la acción de Hilbert frente a perturbaciones $\delta g^{\alpha\beta}$, nos encontramos con la necesidad de verificar el carácter tensorial de la variación $\delta\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}$.
Antes de tomar la variación δ, el Christoffel $\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}$ no es un tensor.
Esto se comprueba realizando un cambio de variable a un sistema local de coordenadas inerciales x^i donde la métrica es la de Minkowski y los Christoffel se anulan.
Distinguimos:

- X^{α} son las coordenadas del espaciotiempo curvo, con índices griegos y con mayúscula.
- x^i son las coordenadas localmente inerciales, con índices latinos y con minúscula.

Cualquier tensor $H^{\lambda}{}_{\alpha\beta}$ se comportaría de esta manera al cambiar de referencia:

$$\partial x^k/\partial X^\lambda .\ \partial X^\alpha/\partial x^i .\ \partial X^\beta/\partial x^j . H^{\lambda}{}_{\alpha\beta} = H^{k}{}_{ij}$$

Los Christoffel no cumplen lo anterior, por eso se llaman pseudotensores.

$$\partial x^k/\partial X^\lambda .\ \partial X^\alpha/\partial x^i .\ \partial X^\beta/\partial x^j . \Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\beta} \neq \Gamma^{k}{}_{ij}$$

El lado derecho da cero porque pasamos a coordenadas inerciales, mientras que el izquierdo puede adquirir cualquier valor arbitrario.

Sin embargo, la variación $\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\beta}$ sí se comporta como un tensor acorde a la varianza de sus índices, debido a que se construye como diferencia de 2 términos próximos.
Supongamos que el origen de la perturbación $\delta g^{\alpha\beta}$ es una variación en los vectores base $\delta \vec{E_\alpha}$.

Por la definición de 8.2.3:

$$\Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\beta} = \tilde{E}^{\lambda} \cdot \partial_\alpha \vec{E_\beta} \qquad \rightarrow \text{aplicamos variación}$$

$$\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\beta} = \delta\tilde{E}^{\lambda} \cdot \partial_\alpha \vec{E_\beta} + \tilde{E}^{\lambda} \cdot \partial_\alpha \delta\vec{E_\beta}$$

Transformamos ahora al otro referencial inercial multiplicando por $\partial x^k/\partial X^\lambda .\ \partial X^\alpha/\partial x^i .\ \partial X^\beta/\partial x^j$

Primer paso:

$$\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\beta} = \delta\tilde{E}^{\lambda} \cdot \partial_\alpha \vec{E_\beta} + \tilde{E}^{\lambda} \cdot \partial_\alpha \delta\vec{E_\beta}$$

$$\partial X^\alpha/\partial x^i . \delta\Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\beta} = \partial X^\alpha/\partial x^i . \delta\tilde{E}^{\lambda} \cdot \partial_\alpha \vec{E_\beta} + \partial X^\alpha/\partial x^i . \tilde{E}^{\lambda} \cdot \partial_\alpha \delta\vec{E_\beta} \qquad \rightarrow \text{agrupamos}$$

$$\partial X^\alpha/\partial x^i . \delta\Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\beta} = \delta\tilde{E}^{\lambda} \cdot (\partial X^\alpha/\partial x^i . \partial_\alpha) \vec{E_\beta} + \tilde{E}^{\lambda} \cdot (\partial X^\alpha/\partial x^i . \partial_\alpha) \delta\vec{E_\beta} \qquad \rightarrow \text{convertimos}$$

$$\partial X^\alpha/\partial x^i . \delta\Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\beta} = \delta\tilde{E}^{\lambda} \cdot \partial_i \vec{E_\beta} + \tilde{E}^{\lambda} \cdot \partial_i \delta\vec{E_\beta}$$

Segundo paso:

$$\partial X^\alpha/\partial x^i . \delta\Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\beta} = \delta\tilde{E}^{\lambda} \cdot \partial_i \vec{E_\beta} + \tilde{E}^{\lambda} \cdot \partial_i \delta\vec{E_\beta}$$

$$\partial X^\beta/\partial x^j . \partial X^\alpha/\partial x^i . \delta\Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\beta} = \partial X^\beta/\partial x^j . \delta\tilde{E}^{\lambda} \cdot \partial_i \vec{E_\beta} + \partial X^\beta/\partial x^j . \tilde{E}^{\lambda} \cdot \partial_i \delta\vec{E_\beta}$$

Hacemos aparecer derivada de producto

$$\partial X^\beta/\partial x^j . \partial X^\alpha/\partial x^i . \delta\Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\beta} = \delta\tilde{E}^{\lambda} \cdot [\partial X^\beta/\partial x^j . \partial_i \vec{E_\beta}] + \partial X^\beta/\partial x^j . \tilde{E}^{\lambda} \cdot \partial_i \delta\vec{E_\beta}$$

$$\partial X^\beta/\partial x^j . \partial X^\alpha/\partial x^i . \delta\Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\beta} = \delta\tilde{E}^{\lambda} \cdot [\partial_i(\vec{E_\beta} \partial X^\beta/\partial x^j) - \partial^2 X^\beta/\partial x^i \partial x^j \vec{E_\beta}] + \partial X^\beta/\partial x^j . \tilde{E}^{\lambda} \cdot \partial_i \delta\vec{E_\beta}$$

$$\partial X^\beta/\partial x^j . \partial X^\alpha/\partial x^i . \delta\Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\beta} = \delta\tilde{E}^{\lambda} \cdot [\partial_i(\vec{E_\beta} \partial X^\beta/\partial x^j) - \partial^2 X^\beta/\partial x^i \partial x^j \vec{E_\beta}] + \partial X^\beta/\partial x^j . \tilde{E}^{\lambda} \cdot \partial_i \delta\vec{E_\beta}$$

$$\partial X^\beta/\partial x^j . \partial X^\alpha/\partial x^i . \delta\Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\beta} = \delta\tilde{E}^{\lambda} \cdot [\partial_i(\vec{E_j}) - \partial^2 X^\beta/\partial x^i \partial x^j \vec{E_\beta}] + \partial X^\beta/\partial x^j . \tilde{E}^{\lambda} \cdot \partial_i \delta\vec{E_\beta}$$

$$\partial X^\beta/\partial x^j . \partial X^\alpha/\partial x^i . \delta\Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\beta} = \delta\tilde{E}^{\lambda} \cdot [0 - \partial^2 X^\beta/\partial x^i \partial x^j \vec{E_\beta}] + \partial X^\beta/\partial x^j . \tilde{E}^{\lambda} \cdot \partial_i \delta\vec{E_\beta}$$

$$\partial X^\beta/\partial x^j . \partial X^\alpha/\partial x^i . \delta\Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\beta} = -\delta\tilde{E}^{\lambda} \cdot [\partial^2 X^\beta/\partial x^i \partial x^j \vec{E_\beta}] + \partial X^\beta/\partial x^j . \tilde{E}^{\lambda} \cdot \partial_i \delta\vec{E_\beta}$$

La simplificación fue posible porque en el referencial inercial ningún vector $\vec{E_j}$ depende de ninguna coordenada x^i. Continuamos operando.

$$\partial X^\beta/\partial x^j . \partial X^\alpha/\partial x^i . \delta\Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\beta} = -\delta\tilde{E}^{\lambda} \cdot [\partial^2 X^\beta/\partial x^i \partial x^j \vec{E_\beta}] + \partial X^\beta/\partial x^j . \tilde{E}^{\lambda} \cdot \partial_i \delta\vec{E_\beta}$$

$$\partial X^\beta/\partial x^j . \partial X^\alpha/\partial x^i . \delta\Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\beta} = -\delta\tilde{E}^{\lambda} \cdot [\partial^2 X^\beta/\partial x^i \partial x^j \vec{E_\beta}] + \tilde{E}^{\lambda} \cdot [\partial X^\beta/\partial x^j . \partial_i \delta\vec{E_\beta}]$$

$$\partial X^\beta/\partial x^j . \partial X^\alpha/\partial x^i . \delta\Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\beta} = -\delta\tilde{E}^{\lambda} \cdot [\partial^2 X^\beta/\partial x^i \partial x^j \vec{E_\beta}] + \tilde{E}^{\lambda} \cdot [\partial_i(\partial X^\beta/\partial x^j . \delta\vec{E_\beta}) - \partial^2 X^\beta/\partial x^i \partial x^j \delta\vec{E_\beta}]$$

$$\partial X^\beta/\partial x^j . \partial X^\alpha/\partial x^i . \delta\Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\beta} = -\delta\tilde{E}^{\lambda} \cdot [\partial^2 X^\beta/\partial x^i \partial x^j \vec{E_\beta}] + \tilde{E}^{\lambda} \cdot [\partial_i(\partial X^\beta/\partial x^j . \delta\vec{E_\beta}) - \partial^2 X^\beta/\partial x^i \partial x^j \delta\vec{E_\beta}]$$

$$\partial X^\beta/\partial x^j . \partial X^\alpha/\partial x^i . \delta\Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\beta} = -\delta\tilde{E}^{\lambda} \cdot [\partial^2 X^\beta/\partial x^i \partial x^j \vec{E_\beta}] + \tilde{E}^{\lambda} \cdot [\partial_i(\delta\vec{E_j}) - \partial^2 X^\beta/\partial x^i \partial x^j \delta\vec{E_\beta}]$$

$$\partial X^\beta/\partial x^j . \partial X^\alpha/\partial x^i . \delta\Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\beta} = -\delta\tilde{E}^{\lambda} \cdot [\partial^2 X^\beta/\partial x^i \partial x^j \vec{E_\beta}] + \tilde{E}^{\lambda} \cdot [\partial_i(0) - \partial^2 X^\beta/\partial x^i \partial x^j \delta\vec{E_\beta}]$$

Aquí la simplificación se justifica de manera diferente: El sistema inercial sigue siendo el mismo debido a que la variación fue chica, por lo tanto los $\vec{E_j}$ no varían.

Tercer paso:

No hace falta multiplicar por el tercer factor, alcanza con observar lo que ya tenemos calculado:

$$\partial X^\beta/\partial x^j . \partial X^\alpha/\partial x^i . \delta\Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\beta} = -\delta\tilde{E}^{\lambda} \cdot [\partial^2 X^\beta/\partial x^i \partial x^j \vec{E_\beta}] - \tilde{E}^{\lambda} \cdot [\partial^2 X^\beta/\partial x^i \partial x^j \delta\vec{E_\beta}] \qquad \rightarrow \text{factor común}$$

$$\partial X^\beta/\partial x^j . \partial X^\alpha/\partial x^i . \delta\Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\beta} = -\partial^2 X^\beta/\partial x^i \partial x^j [\delta\tilde{E}^{\lambda} \cdot \vec{E_\beta} + \tilde{E}^{\lambda} \cdot \delta\vec{E_\beta}] \qquad \rightarrow \text{variación de producto}$$

$$\partial X^\beta/\partial x^j . \partial X^\alpha/\partial x^i . \delta\Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\beta} = -\partial^2 X^\beta/\partial x^i \partial x^j \ \delta(\tilde{E}^{\lambda} \cdot \vec{E_\beta})$$

$$\partial X^\beta/\partial x^j . \partial X^\alpha/\partial x^i . \delta\Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\beta} = -\partial^2 X^\beta/\partial x^i \partial x^j \ .0$$

$$\partial X^\beta/\partial x^j . \partial X^\alpha/\partial x^i . \delta\Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\beta} = 0$$

$\tilde{E}^{\lambda} \cdot \vec{E_\beta} = \delta Kron[\lambda,\beta]$,las variaciones de los duales $\tilde{E}^{\lambda}$ se adaptan a las de los $\vec{E_\beta}$.
Queda entonces demostrado que $\delta\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}$ es nulo al pasar al otro referencial inercial, y se corresponde con lo esperado en ese otro referencial $\delta\Gamma^{k}_{ij} = 0$.

12.1: Ecuación diferencial de Schwarzschild→métrica temporal:

Las ecuaciones de Einstein para la métrica de Schwarzschild conducen a resolver:
$A''(r) + A'(r)^2 + 2.A'(r)/r = 0$, para un coeficiente métrico temporal $g_{oo}(r) = -e^{A(r)}$

Primer cambio de variable: $A'(r)=u(r)$
→ $u'(r) + u^2(r) + 2u(r)/r = 0$
Sigue quedando una ecuación diferencial no-lineal; en general es conveniente (dentro de lo posible) llevarla a una forma *lineal* o al menos a una forma de variables separables. En este caso se puede lograr:

Segundo cambio de variable: $u=1/v$, $u' = -v'/v^2$
$-v'/v^2 + 1/v^2 + 2/(r.v^2) = 0$
$-v'(r) + 1 + 2.v(r)/r = 0$
$v'(r) - 2.v(r)/r = 1$
→Ahora sí quedó una ecuación lineal, está a nuestro alcance.

Solución particular:
La buscamos de la forma polinómica con U incógnita
$v(r) = U.r$
$v'(r) = U$
$2.v(r)/r = 2U$
$U - 2U = 1$
$U = -1$
→solución particular $v(r) = -r$

Solución homogénea:
$v(r) = r^2$
$v'(r) = 2r$
$2.v(r)/r = 2r$
→$vh(r)=r^2$

Solución total = particular + λ.homogénea
$v(r) = -r + \lambda.r^2$

Deshacemos los cambios de variable:
$u(r) = 1/v(r)$
$u(r) = 1 / (\lambda.r^2 - r)$
$u(r) = A'(r)$
La incógnita A(r) es una primitiva elemental, se obtiene descomponiendo por fracciones simples.
$u(r) = -1/r + \lambda/(\lambda.r - 1)$
$u(r) = -1/r + 1/(r - 1/\lambda)$ →integramos $A(r)=\int u(r)dr$
$A(r) = \log(C) + \log(r-1/\lambda) - \log(r)$
$A(r) = \log\{C.(r-1/\lambda)/r\}$
$A(r) = \log\{C.[1-1/(\lambda r)]\}$
$e^{A(r)} = C.[1-1/(\lambda r)]$
Recordamos que el coeficiente métrico involucraba un $\alpha(r)=e^{A(r)}$
Lo que significa $\alpha(r) = C.[1-1/(\lambda r)] = C-(C/\lambda)/r]$

La compatibilidad con el límite newtoniano $r \to \infty$ permite despejar las constantes de integración:
$C=1$, $C/\lambda=r_S$
$\rightarrow \alpha(r)= 1 - r_s/r$

12.1.2: Ecuación diferencial de Schwarzschild →métrica espacial:

Las componentes angulares del tensor de Ricci llevan a una ecuación diferencial de apariencia bastante diferente a la anterior, que sin embargo conduce a una función solución muy parecida.

$dB/(1-e^B) = dr/r$

siendo $g_{rr}(r)=\beta(r)=e^{B(r)}$

Deshacemos el cambio de variable de la métrica:
$B=\ln(\beta)$
$dB=d\beta/\beta$

$d\beta/\beta/(1-\beta) = dr/r$

Expresamos como descomposición en fracciones simples:

$dr/r = d\beta.[1/\beta - 1/(\beta-1)]$ →integramos y salen primitivas exactas

$\log(r/C) = \log(\beta) - \log(\beta-1) = \log[\beta/(\beta-1)]$
$r/C = \beta/(\beta-1)$
$C/r = (\beta-1)/\beta$
$C/r = 1 - 1/\beta$
$1/\beta = 1 - C/r$
$\beta(r) =$ **¡Error!**

12.2: Ecuación diferencial de Reissner-Nordström:

$e^A.[A''(r)/2+A'(r)^2/2 + A'(r)/r] = r_q^2/r^4$

Esta ecuación diferencial es más complicada de resolver que la de Schwarzschild porque la función A(r) aparece dentro de la exponencial y también fuera de la exponencial.

Debemos comenzar deshaciendo el cambio de variable $\alpha(r)=e^{A(r)}$; $A(r)=\log[\alpha(r)]$

$A'(r)=\alpha'/\alpha$
$A''(r) = \alpha''/\alpha + \alpha'.(-\alpha')/\alpha^2$

$A'(r)^2=\alpha'^2/\alpha^2$
$A''(r) + A'(r)^2 =\alpha''/\alpha$

La ecuación diferencial, ahora *lineal* en la incógnita $\alpha(r)$, queda:

$\alpha.[\alpha''/(2\alpha)+\alpha'/\alpha/r] = r_q^2/r^4$
$\alpha''/2+\alpha'/r = r_q^2/r^4$

Llamamos $v(r)=\alpha'(r)$ y sustituimos

$v'(r)/2 + v(r)/r = r_q^2/r^4$

$v(r) = 1/r^2$ es solución de la ecuación homogénea, igual que en la solución de Schwarzschild
$v(r) = K/r^2$ es la contribución que va a aportar a la solución total, con K ajustada a las condiciones de borde

Buscamos soluciones particulares polinómicas con exponente 'η' y amplitud 'U':

$v(r)=U.r^\eta$ $\quad$ $v(r)/r=U.r^{\eta-1}$
$v'(r) = U.\eta.r^{\eta-1}$ $\quad$ $v'(r)/2= U/2.\eta.r^{\eta-1}$
$v'(r)/2 + v(r)/r = U(1 + \eta/2).r^{\eta-1} = r_q^2/r^4$

Deben satisfacerse al mismo tiempo:

$U(1+\eta/2)=r_q^2$

$\eta-1 = -4 \qquad \rightarrow \eta = -3$

$U(1-3/2) = r_q^2$

$U = -2r_q^2$

→ Solución particular $v(r) = -2r_q^2/r^3$

La linealidad permite expresar la solución total como suma de la particular más la homogénea.

$\alpha'(r) = v(r) = -2r_q^2/r^3 + K/r^2 \qquad \rightarrow$integramos

$\alpha(r) = C + r_q^2/r^2 - K/r$

Las constantes de integración se ajustan para que valga la Física Clásica conocida en el límite de los bajos campos $r \rightarrow \infty$. $C=1$ y $K=r_S=2MG/c^2$

$$\alpha(r) = 1 - r_S/r + r_q^2/r^2$$

Advertencia: Esta 'M' de Reissner-Nordström *tiene unidades de masa pero no coincide con la masa material que forma el astro masivo*. Estrictamente corresponde al producto de $1/c^2$ x la energía encerrada en el volumen, donde esa energía contempla la masa pero también la contribución de energía electrostática de la carga 'Q'.

Dedicatoria:

Emma Schwedt, 1943...∞

Hugo Sáez, 1939…∞

Reconocimientos:

- 1990 a 1991. Prof. Mario Guerra, Colegio Alemán de Montevideo.
- 1994 a 1995: Prof. Daniel Marta, Universidad de la República, Uruguay.
- 2022: Dr. Efraim Buksman, Universidad ORT, Uruguay.

Bibliografía y Citas:

http://www.ugr.es/~bjanssen/text/BertJanssen-RelatividadGeneral.pdf
http://www.blau.itp.unibe.ch/newlecturesGR.pdf
http://wwwhome.lorentz.leidenuniv.nl/~henk/grh.pdf
Leonard Susskind, Stanford University, Lectures on General Relativity 1..10
http://teoria-de-la-relatividad.blogspot.com/
http://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/asignaturas/to2009/geomiv0607/apgeom3.pdf
https://www.youtube.com/watch?v=T2JrJupa2Og
http://farside.ph.utexas.edu/teaching/em/lectures/node128.html
http://farside.ph.utexas.edu/teaching/336k/Newton/node109.html
http://ion.uwinnipeg.ca/~vincent/4500.6-001/Cosmology/Interior%20Solution.htm
https://www.kth.se/social/files/58233621f276544d5a722051/rel.pdf
https://www.youtube.com/watch?v=353lEB63iyg
https://ned.ipac.caltech.edu/level5/March01/Carroll3/Carroll7.html
https://arxiv.org/pdf/1502.00149.pdf
https://www.youtube.com/watch?v=v_z5hGspgTM
https://www.researchgate.net/publication/238984245_The_Meaning_of_Einstein's_Equation
https://arxiv.org/pdf/gr-qc/0401099.pdf
https://web.stanford.edu/~oas/SI/SRGR/lib/BaezEinsteinEqn.pdf
https://math.ucr.edu/home/baez/einstein/einstein.html
https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Extras/Einstein_ether/
https://cds.cern.ch/record/340032/files/9712019.pdf
http://gfm.cii.fc.ul.pt/events/lecture_series/general_relativity/gfm-general_relativity-lecture4.pdf
https://www.bjp-bg.com/papers/bjp2018_2_180-202.pdf
https://sites.math.washington.edu/~morrow/336_19/papers17/carson.pdf
https://www2.physics.ox.ac.uk/sites/default/files/2012-09-20/gr_b5_pdf_20413.pdf
http://youtube.com/watch?v=OIjLUzS6SQA
http://www.thespectrumofriemannium.com/2013/05/24/log105-einsteins-equations/
https://www.fis.unam.mx/~max/mecanica/b_Schutz.pdf
https://arxiv.org/ftp/physics/papers/0110/0110007.pdf
https://arxiv.org/pdf/gr-qc/0311030.pdf
https://www.researchgate.net/publication/344433659_Approach_to_the_Schwarzschild_Metric_with_SL2R_Group_Decomposition
https://www.nbi.ku.dk/bibliotek/noter-og-undervisningsmateriale-i-fysik/general-relativity-and-cosmology---a-personal-outline/General_relativity_and_cosmology_08_03_2020.pdf
https://www.researchgate.net/publication/332868902_Apuntes_de_Relatividad_General
https://warwick.ac.uk/study/csde/gsp/eportfolio/directory/pg/live/marmaf/personal/tesis_ros.pdf
http://www.ifm.umich.mx/~sarbach/teaching/maestria/rg18/RG.pdf
https://www.youtube.com/watch?v=feBT0Anpg4A
https://www.youtube.com/watch?v=pHfFSQ6pLGU
http://einsteinrelativelyeasy.com/index.php/general-relativity
https://www.fis.unam.mx/~max/mecanica/b_Schutz.pdf
https://web.stanford.edu/~oas/SI/SRGR/notes/SRGRLect10_2007.pdf
https://www.researchgate.net/profile/Friedrich_Hehl/publication/272625576_Schwarzschild_and_Kerr_Solutions_of_Einstein's_Field_Equation_--_an_introduction/links/5d0b678ba6fdcc35c15c4690/Schwarzschild-and-Kerr-Solutions-of-Einsteins-Field-Equation--an-introduction.pdf
https://galileoandeinstein.phys.virginia.edu/lectures
https://javierrubioblog.files.wordpress.com/2015/12/chapter6.pdf
https://www.biografiasyvidas.com/
https://www.physicsforums.com/threads/electromagnetic-field-tensor-in-curvilinear-coordinates.618984/
https://www.researchgate.net/publication/232503689_A_Possible_Intuitive_Derivation_of_the_Kerr_Metric_in_Orthogonal_FormBased_On_Ellipsoidal_Metric_Ansatz

https://www.naturelovesmath.com/wp-content/uploads/2017/01/General-Relativity-Loud-and-Clear.pdf
https://www.youtube.com/watch?v=9WbrujNXSw8
https://www.youtube.com/watch?v=XFV2feKDK9E (Special Relativity Brian Greene)
https://www.bjp-bg.com/papers/bjp2018_2_180-202.pdf
https://www.youtube.com/watch?v=ZCV73M3PcPQ [Wildberger cuestiona 2do postulado Rel.Esp]
https://www.youtube.com/watch?v=tTuXKTRuIxs [Eddie Boyes]
https://www.youtube.com/watch?v=0Vb4B8mN-Ek[General Relativity 2019, Alex Flournoy]
https://www.youtube.com/watch?v=Cjh4HrIK2bA [Taller de Relatividad, Sergio Montañez]
https://av.tib.eu/media/19932 [Jörn Loviscach]
https://www.youtube.com/watch?v=rgE-NRR2Evc [Peter Kroll]
https://www.youtube.com/watch?v=W2lgURyfLfs [Físicas Exactas, UBA]
Failure of Galilean relativity /variance of Maxwell's equations under Galilean transformation[Suvajit]
The Feynman Lectures on Physics Vol. I Ch. 15: The Special Theory of Relativity[Feynman]
https://www.feynmanlectures.caltech.edu/II_25.html [Feynman]
Discovering Relativity for Yourself, Por Sam Lilley
1] Lev D. Landau, Evgeny M. Lifshitz, "Course on Theoretical Physics Vol. 2: The Classical Theory of Fields", Butterworth-Heinemann (1975), ISBN 978-0-750-62768-9.
[2] Charles W. Misner, Kip S. Thorne, John Archibald Wheeler, "Gravitation", W. H. Freeman and Co. (1973), ISBN 978-0-7167-0344-0.
[3] J.R. Reitz, F.J. Milford and R.W. Christy, Foundations of Electromagnetic Theory (Addison-Wesley, Reading, 1979), 3rd ed